

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. W. FRITZ KOHLRAUSCH UND HANS THIRRING

GRAZ

WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

PAUL URBAN

GRAZ

6. BAND, 2.—3. HEFT

MIT 8 ABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM NOVEMBER 1952)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1952

Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen.

Allgemeines. Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht gerade an demselben Problem arbeiten. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingeffigter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift ist ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle. Nur den wenigsten ist es gegeben, auf den ersten Anblich schon das Optimum an Aufbau, Gliederung und Ausdruck zu erreichen. Meist wird dies erst nach mehrfachem Umarbeiten gelingen. Diese Mühe muß der Autor auf sich nehmen. Erstens schon in seinem eigensten Interesse, um nicht monatelange Arbeit durch unzuweckmäßige Darstellung der Ergebnisse zu entwerfen; zweitens im Interesse der Drucklegung, da nachträgliche stilistische Verbesserungen und Veränderungen so viel Mehrarbeit für den Setzer bedeuten, daß sie, selbst wenn die Kosten dem Autor angerechnet werden, bei den heutigen Verhältnissen als untragbar bezeichnet werden müssen. Eben diese Verhältnisse machen es den Herausgebern zur unabweislichen Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Manuskripte sind **entweder** an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Universitätsplatz 5 **oder** an den Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5, zu richten.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“

Inhaltsübersicht: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Inhaltsübersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. ... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

6. Band/2.—3. Heft. Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Robl, H. Paarerzeugung im homogenen Magnetfeld	105
Überall, H. Die Energieabhängigkeit der Phasenverschiebung bei der Proton-Proton-Streuung	119
Cap, F. Über allgemeine Relativitätstheorie und einheitliche Feldtheorie	135
Krzywoblocki, M. Z. E. On the Equations of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics of Compressible Medium	157
Sitte, K. Über die Stoßquerschnitte in durchdringenden Höhenstrahlungsschauern	167
Urban, P. Beitrag zum W.K.B.-Verfahren	181
Baumann, K. Bericht über die neuere Entwicklung der Quantenelektrodynamik. III.	195
Hafner, E. Das vollständige System der elektromagnetischen Eigenschwingungen eines zweiachsig anisotropen Parallelepipedes	209
Kohlrausch, K. W. F. Vorbericht über die Herbsttagung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft	219
Buchbesprechungen	237

Paarerzeugung im homogenen Magnetfeld.

Von

H. Robl

Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 27. Dezember 1951.)

Mit exakten Eigenfunktionen von Elektronen im homogenen Magnetfeld wird der Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung durch Lichtquanten in erster Näherung berechnet. Es wird angenommen, daß sich die einfallenden Lichtquanten senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes bewegen. Es zeigt sich, daß für die experimentell herstellbaren Feldstärken der Wirkungsquerschnitt verschwindend klein ist, wenn nicht die Energie der Lichtquanten sehr groß ist gegenüber der Ruhenergie des Elektrons.

Die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren durch Lichtquanten erfordert Impulsabgabe an ein äußeres Feld. Bei der gewöhnlichen Paarerzeugung in Materie wird die Erhaltung von Impuls und Energie durch das elektrostatische Feld der Atomkerne ermöglicht. Der zur Paarerzeugung notwendige Übergang eines Elektrons aus einem Zustand mit negativer Energie in einen Zustand mit positiver Energie läßt sich bei Verwendung von Wellenfunktionen freier Elektronen durch aufeinanderfolgende Wechselwirkung eines Lichtquants mit einem Elektron und Wechselwirkung des Elektrons mit dem Feld des Atomkerns beschreiben.

Auch ein Magnetfeld kann grundsätzlich zur Paarerzeugung Anlaß geben. Wir behandeln die Paarerzeugung durch Lichtquanten in einem homogenen Magnetfeld. Die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Magnetfeld wird durch Verwendung von exakten Eigenfunktionen berücksichtigt.

Vor einer Paarerzeugung sind alle Zustände mit negativer Energie von Elektronen besetzt. Diese Elektronen entziehen sich der Beobachtung. Wenn aber ein Elektron mit negativer Energie durch Absorption eines Lichtquants in einen Zustand mit positiver Energie übergeht, dann entsteht im negativen Energieband ein Loch, welches als Positron in Erscheinung tritt. Wenn sich das Lichtquant in der Feldrichtung bewegt, dann ist eine Paarerzeugung, ebenso wie bei freien Elektronen, mit den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls nicht verträglich. Wir nehmen daher an, daß die Bewegungsrichtung

des Lichtquants auf der Feldrichtung senkrecht steht. Die Herleitung der Eigenfunktionen und Energieeigenwerte der DIRAC-Gleichung für ein homogenes Magnetfeld entnehmen wir einer Arbeit von JOHNSON und LIPPMANN¹.

Ein homogenes Magnetfeld mit der Feldstärke \mathfrak{H} in der z -Richtung eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y, z wird dargestellt durch ein Vektorpotential mit den Komponenten

$$A_x = -\frac{\mathfrak{H}}{2} y, \quad A_y = \frac{\mathfrak{H}}{2} x, \quad A_z = 0. \quad (1)$$

In der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$(H - E) \psi = 0 \quad (2)$$

ist die HAMILTON-Funktion H für ein Elektron mit der Ladung $-e$ und der Ruhenergie $m c^2 = \mu$ im Vektorpotential \mathbf{A} gegeben durch

$$H = \frac{P^2}{2\mu}, \quad (3)$$

wobei der Operator \mathbf{P} die Komponenten

$$P_x = -i \hbar c \frac{\partial}{\partial x} + e A_x, \dots \quad (4)$$

besitzt. Mit der Abkürzung

$$\lambda^2 = \frac{\hbar c}{e \mathfrak{H}} \quad (5)$$

ergeben sich Eigenfunktionen mit HERMITESchen Polynomen²

$$\psi_n = N_n e^{i \frac{p z}{\hbar c}} e^{i \frac{y(x-2a)}{2 \lambda^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \lambda^2}} H_n \left(\frac{x-a}{\lambda} \right), \quad (6)$$

wobei die mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizierte Impuls-komponente in der z -Richtung mit p bezeichnet ist. Die Wellenfunktion mit dem Parameter a entspricht solchen Elektronenbahnen, deren Achse die x - y -Ebene auf der Geraden $x = a$ schneidet. Die Normierung von ψ_n in einem Gebiet, welches durch die Ebenen $y = \pm L/2, z = \pm L/2$ begrenzt ist, wird durch Normierungsfaktoren

$$N_n = \frac{i^n}{L \pi^{1/4} (\lambda 2^n n!)^{1/2}} \quad (7)$$

erreicht. Die Wahl von imaginären Normierungsfaktoren erweist sich für den Übergang zur DIRAC-Gleichung als zweckmäßig. Zu den Eigenfunktionen ψ_n gehören Energieeigenwerte

$$E_n = \frac{1}{2\mu} \left[p^2 + \varepsilon^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (8)$$

wenn zur Abkürzung

$$\varepsilon^2 = 2 \hbar c e \mathfrak{H} \quad (9)$$

gesetzt wird.

¹ M. H. JOHNSON, B. A. LIPPMANN, Phys. Rev. **76**, 828, 1949.

² Vgl. z. B. H. ROBL, Acta Phys. Austr., **6**, 45, 1952.

In der entsprechenden DIRAC-Gleichung

$$(H - E)\varphi = 0 \quad (10)$$

ist die HAMILTON-Funktion gegeben durch

$$H = (\alpha \mathbf{P}) + \beta \mu \quad (11)$$

mit den Matrizen

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aus der Identität $(H^2 - E^2)\chi = (H - E)(H + E)\chi$ folgt, daß $(H + E)\chi$ eine Lösung der DIRAC-Gleichung darstellt, wenn die Funktion χ die Differentialgleichung $(H^2 - E^2)\chi = 0$ befriedigt. Für diese Differentialgleichung ergibt sich mit der HAMILTON-Funktion von Gl. (11), den bekannten Vertauschungsregeln für die DIRACschen Matrizen und mit dem Spinoperator $\sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y$

$$\left\{ P^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma_z - E_n^2 \right\} \chi_n = 0. \quad (13)$$

Aus der Eigenwertgleichung $\sigma_z\chi = s\chi$ mit Eigenwerten $s = \pm 1$ folgt

$$\left\{ P^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2s - E_n^2 \right\} \chi_n = 0. \quad (14)$$

Mit den Energieeigenwerten von Gl. (8) erhält die SCHRÖDINGER-Gleichung (2) mit Gl. (3) die Gestalt

$$\left\{ P^2 - \left[p^2 + \varepsilon^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \psi_n = 0. \quad (15)$$

Der Vergleich von (14) mit (15) liefert die Energieeigenwerte der DIRAC-Gleichung

$$E_n = \pm \left[\mu^2 + p^2 + \varepsilon^2 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Durch die zusätzliche Forderung $\beta\chi = \chi$ erhält man nach Weglassung überflüssiger Indizes die Spinoren

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \psi_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

mit Energieeigenwerten

$$E_+ = \pm [\mu^2 + p^2 + \varepsilon^2 (n+1)]^{1/2}, \quad E_- = \pm [\mu^2 + p^2 + \varepsilon^2 n]^{1/2}, \quad (18)$$

wobei die Zeichen + und — an Stelle der Indizes von χ und E die Spineinstellung angeben. Mit der HAMILTON-Funktion von Gl. (11) folgt

$$(H + E) \chi_+ = \begin{pmatrix} \mu + E_+ \\ 0 \\ p \\ P_x + i P_y \end{pmatrix} \psi_n, \quad (H + E) \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu + E_- \\ P_x - i P_y \\ -p \end{pmatrix} \psi_n. \quad (19)$$

Mit Hilfe der bekannten Rekursionsformeln für die HERMITESCHEN Polynome findet man

$$(P_x + i P_y) \psi_n = \varepsilon (n+1)^{1/2} \psi_{n+1}, \quad (P_x - i P_y) \psi_n = \varepsilon n^{1/2} \psi_{n-1}. \quad (20)$$

Die Eigenfunktionen der DIRAC-Gleichung lauten daher

$$\varphi_+ = G_+ \begin{pmatrix} (\mu + E_+) \psi_n \\ 0 \\ p \psi_n \\ \varepsilon (n+1)^{1/2} \psi_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \varphi_- = G_- \begin{pmatrix} 0 \\ (\mu + E_-) \psi_n \\ \varepsilon n^{1/2} \psi_{n-1} \\ -p \psi_n \end{pmatrix} \quad (21)$$

mit Normierungsfaktoren

$$G_+ = [2 E_+ (\mu + E_+)]^{-1/2}, \quad G_- = [2 E_- (\mu + E_-)]^{-1/2}. \quad (22)$$

In einem Würfel mit der Kantenlänge L besteht für den Übergang eines Elektrons von einem Spinor φ zu einem Spinor φ' bei Absorption eines Lichtquants mit dem Impuls \mathbf{k} pro Zeiteinheit die Wahrscheinlichkeit¹

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \varrho(E') |H'|^2 \quad (23)$$

mit

$$H' = e \hbar c \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{1/2} L^{-3/2} I \quad (24)$$

und

$$I = \int \varphi^* a_e \varphi' e^{-i \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\hbar c}} d\tau. \quad (25)$$

Dabei bedeutet $\varrho(E') dE'$ die Zahl der Endzustände im Intervall E' bis $E' + dE'$ und a_e die Komponente von \mathbf{a} in Richtung der Polarisation des absorbierten Lichtquants.

Das Lichtquant bewege sich in der y -Richtung, so daß $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = k y$. Dann ergibt sich für die Übergänge je nach der Polarisation des Lichtquants und je nach der Spineinstellung des Elektrons vor und nach der Absorption das folgende Schema

$\varphi_-^* a_x \varphi'_-,$	$\varphi_-^* a_z \varphi'_-,$
$\varphi_+^* a_x \varphi'_-,$	$\varphi_+^* a_z \varphi'_-,$
$\varphi_-^* a_x \varphi'_+,$	$\varphi_-^* a_z \varphi'_+,$
$\varphi_+^* a_x \varphi'_+,$	$\varphi_+^* a_z \varphi'_+,$

¹ W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Sec. Ed. Oxf. 1948.

Wir untersuchen zunächst den Übergang $\varphi_+^* \alpha_x \varphi_-'$ und erhalten für das in Gl. (25) eingeführte Integral

$$I = G_+ G_-' [p(\mu + E_-') - p'(\mu + E_+)] I_{n, n'} \quad (26)$$

wobei

$$I_{\mu, \nu} = \frac{i^{\nu-\mu}}{L^2 \lambda (\pi 2^\mu \mu! 2^\nu \nu!)^{1/2}} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-\frac{i}{\hbar c} (p-p') z} dz \int_{-L/2}^{+L/2} e^{i \left(\frac{a-a'}{\lambda^2} - \frac{k}{\hbar c} \right) y} dy \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \lambda^2}} H_\mu \left(\frac{x-a}{\lambda} \right) e^{-\frac{(x-a')^2}{2 \lambda^2}} H_\nu \left(\frac{x-a'}{\lambda} \right) dx. \quad (27)$$

In dem Integral über x sind die Grenzen $\pm L/2$, den Normierungsfaktoren entsprechend, bereits durch $\pm \infty$ ersetzt. Wenn man fordert, daß die Exponentialfunktionen in den Integralen über z und y an den Grenzen periodisch sind, so verschwinden die Integrale, wenn nicht $p = p'$ und $a - a' = k \lambda^2 / \hbar c$. Die Bedingung $p = p'$ bringt die Erhaltung des Impulses zum Ausdruck. Da das absorbierte Lichtquant keine Impulskomponente in der z -Richtung besitzt, müssen die Impulskomponenten p und p' des Elektrons vor und nach der Absorption des Lichtquants übereinstimmen. Da die Impulskomponente des Positrons der Impulskomponente p des Elektrons, welches aus dem negativen Energieband entfernt wird, entgegengesetzt ist, wird die Summe der Impulskomponenten des erzeugten Paares gleich Null. Wir führen die dimensionslose Größe $(a' - a)/\lambda = \alpha$ ein und erhalten die Beziehung

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{k^2}{\varepsilon^2}. \quad (28)$$

Mit der entsprechenden Substitution $(x - a)/\lambda = \xi$ ergibt sich

$$I_{\mu, \nu} = \frac{i^{\nu-\mu} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{(\pi 2^\mu \mu! 2^\nu \nu!)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi(\xi-\alpha)} H_\mu(\xi) H_\nu(\xi-\alpha) d\xi. \quad (29)$$

Zur Berechnung der Integrale $I_{\mu, \nu}$ verwenden wir die erzeugenden Funktionen der HERMITESchen Polynome

$$e^{2s\xi-s^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} H_\mu(\xi) s^\mu, \\ e^{2t(\xi-\alpha)-t^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} H_\nu(\xi-\alpha) t^\nu. \quad (30)$$

Danach folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2s\xi - s^2 + 2t(\xi - a) - t^2 - \xi(\xi - a)} d\xi = \\ & = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s^{\mu} t^{\nu}}{\mu! \nu!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi(\xi - a)} H_{\mu}(\xi) H_{\nu}(\xi - a) d\xi. \end{aligned} \quad (31)$$

Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2s\xi - s^2 + 2t(\xi - a) - t^2 - \xi(\xi - a)} d\xi = \pi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{a^2}{4}} e^{2st + a(s-t)} \quad (32)$$

und entwickeln die im Ergebnis auftretenden Exponentialfunktionen in ihre Potenzreihen

$$e^{2st} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2st)^p}{p!}, \quad (33)$$

$$e^{as} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(as)^q}{q!}, \quad e^{-at} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-at)^r}{r!}.$$

Damit wird nach Gl. (31)

$$\begin{aligned} & \pi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{a^2}{4}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^p a^{q+r}}{p! q! r!} s^{p+q} t^{p+r} = \\ & = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s^{\mu} t^{\nu}}{\mu! \nu!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi(\xi - a)} H_{\mu}(\xi) H_{\nu}(\xi - a) d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von s^{μ} und t^{ν} zeigt, daß $q = \mu - p$ und $r = \nu - p$. Wir erhalten daher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi(\xi - a)} H_{\mu}(\xi) H_{\nu}(\xi - a) d\xi = \pi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{a^2}{4}} a^{\mu+\nu} (-1)^{\nu} P\left(\frac{a^2}{2}\right) \quad (35)$$

mit Polynomen

$$P(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{\mu!}{(\mu-p)!} \frac{\nu!}{(\nu-p)!} (-x)^{-p}. \quad (36)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß das in Gl. (35) enthaltene Integral für $a \rightarrow 0$ dem bekannten Wert $\delta_{\mu\nu} \pi^{\frac{1}{2}} 2^{\mu} \mu!$ zustrebt.

Wir wollen nun die Polynome $P(x)$ durch zugeordnete LAGUERREsche Polynome ausdrücken. Wir zeigen zuerst, daß

$$P(x) = (-1)^{\mu} e^x x^{-\nu} \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} (e^{-x} x^{\nu}). \quad (37)$$

Durch Anwendung der LEIBNIZschen Regel ergibt sich

$$P(x) = x^{-\nu} \sum_{p=0}^{\mu} \frac{\mu!}{p! (\mu-p)!} (-1)^{-p} \frac{d^p}{dx^p} x^{\nu}. \quad (38)$$

Wegen $d^p (x^{\nu})/dx^p = \nu(\nu-1)\dots(\nu-p+1) x^{\nu-p}$ erhalten wir Gl. (36), wobei allerdings die Summation zunächst nicht bis $p = \infty$, sondern nur bis $p = \mu$ zu erstrecken ist. Nun bricht aber das Polynom $P(x)$ wegen $(-n)! = \infty$ für $\nu < \mu$ bei $p = \nu$ und für $\nu > \mu$ bei $p = \mu$ ab, so daß die Summation tatsächlich bis $p = \infty$ erstreckt werden kann. Damit ist gezeigt, daß sich die Polynome von Gl. (36) durch den in Gl. (37) angegebenen Ausdruck darstellen lassen. Wir definieren die zugeordneten LAGUERRESchen Polynome durch

$$e^{-x} x^{\lambda} L_{\mu}^{\lambda} = \frac{1}{\mu!} \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} (e^{-x} x^{\mu+\lambda}). \quad (39)$$

Mit $\mu + \lambda = \nu$, $\lambda = \nu - \mu$ erhalten wir

$$\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} (e^{-x} x^{\nu}) = \mu! e^{-x} x^{\nu-\mu} L_{\mu}^{\nu-\mu}(x). \quad (40)$$

Nach Gl. (37) ergibt sich daher

$$P(x) = (-1)^{\mu} \mu! x^{-\mu} L_{\mu}^{\nu-\mu}(x). \quad (41)$$

Nach Gl. (35) benötigen wir die Polynome $P(\alpha^2/2)$. Wie aus Gl. (28) hervorgeht, ist das Argument $\alpha^2/2$ eine sehr große Zahl, da zur Paarerzeugung notwendigerweise $k > 2\mu$ und für die in Frage kommenden magnetischen Feldstärken $\mu/\varepsilon \gg 1$. Außerdem werden auch die Zeiger μ und ν sehr große Werte annehmen können. Eine geeignete asymptotische Darstellung der zugeordneten LAGUERRESchen Polynome¹ lautet

$$L_{\mu}^{\lambda}(x) = (-1)^{\mu} 2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4} \sin^{-\frac{1}{2}} \Phi e^{-\frac{1}{2} (2\mu + \lambda + 1) (\sin 2\Phi - 2\Phi)}, \quad (42)$$

wobei zwischen der Hilfsgröße Φ und dem Argument x die Beziehung

$$x = 2(2\mu + \lambda + 1) \cos^2 \Phi \quad (43)$$

besteht. Aus den Gln. (35), (41), (42) und (43) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi(\xi-\alpha)} H_{\mu}(\xi) H_{\nu}(\xi-\alpha) d\xi = \\ & = \frac{1}{2} (-1)^{\nu} \mu! \mu^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (v-\mu) - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{e^2} \frac{1}{2^2} (\mu+\nu) \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) - \frac{1}{4} \\ & \sin^{-\frac{1}{2}} \Phi e^{-\frac{1}{2} (v+\mu+1) (\sin 2\Phi - 2\Phi)}, \end{aligned} \quad (44)$$

¹ G. SZEGÖ, Orthogonal Polynomials, Am. Math. Soc., 1939.

wobei

$$\frac{\alpha^2}{2} = 2(\nu + \mu + 1) \cos^2 \Phi. \quad (45)$$

Nach Gl. (29) erhalten wir daher

$$I_{\mu, \nu} = \frac{i^{\nu-\mu} (-1)^\nu}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\mu!}{\nu!} \right)^2 \mu^{\frac{1}{2}(\nu-\mu)} - \frac{1}{4} \sin^{-\frac{1}{2}} \Phi e^{-\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)(\sin 2\Phi - 2\Phi)}. \quad (46)$$

Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit eines Elektrons von einem Zustand negativer Energie mit Quantenzahl n zu einem Zustand positiver Energie mit Quantenzahl n' benötigen wir nach Gl. (23) noch die Dichte der Endzustände $\varrho(E')$. Der Endzustand besteht aus einem Elektron mit positiver Energie

$$E'_- = [\mu^2 + p'^2 + \varepsilon^2 n']^{1/2}. \quad (47)$$

Die Zahl der Impulzustände in der z -Richtung ist gegeben durch

$$dZ' = L \frac{dp'}{2\pi \hbar c}. \quad (48)$$

Für einen bestimmten Übergang von einer Quantenzahl n zu einer Quantenzahl n' ist

$$dE'_- = \frac{p'}{E'_-} dp', \quad dp' = \frac{E'_-}{p'} dE', \quad (49)$$

also

$$dZ' = \frac{L}{2\pi \hbar c} \frac{E'_-}{p'} dE'. \quad (50)$$

Daraus folgt für die Dichte der Endzustände

$$\varrho'(E') = \frac{L}{2\pi \hbar c} \frac{E'_-}{|p'|}. \quad (51)$$

Mit diesem Wert für die Dichte der Endzustände würde man die Übergangswahrscheinlichkeit für den Fall erhalten, daß sich in dem Würfel mit der Kantenlänge L vor dem Prozeß ein Elektron negativer Energie befände. Tatsächlich ist aber das negative Energieband voll besetzt. Man muß daher mit der Zahl der Elektronen negativer Energie multiplizieren. Da der Impulzustand des Elektrons negativer Energie durch den Impulzustand des Elektrons positiver Energie und durch den Impulzustand des einfallenden Lichtquants in der z -Richtung bestimmt ist, ergibt sich die Zahl der Elektronen aus der Forderung, daß in Gl. (27) der Exponent $i y a/\lambda^2$ an den Grenzen periodisch ist, daß also $L a/\lambda^2$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . Daraus folgt

$$L \frac{da}{\lambda^2} = 2\pi dZ, \quad dZ = L \frac{da}{2\pi \lambda^2}. \quad (52)$$

Da a zwischen $-L/2$ und $+L/2$ liegt, ergibt sich

$$Z = \frac{L^2}{2\pi\lambda^2}. \quad (53)$$

Z gibt die Zahl von Elektronen mit einer bestimmten Quantenzahl n in einem bestimmten Impulszustand p an. Die Gesamtzahl der Zustände in den Intervallen dp und dn wäre

$$dZ_g = L^2 \frac{1}{2\pi\lambda^2} L \frac{dp}{2\pi\hbar c} dn. \quad (54)$$

Während für Elektronen negativer Energie im homogenen Magnetfeld nach Gl. (16) bei Vernachlässigung der Spinenergie $E = -[\mu^2 + p^2 + \varepsilon^2(n + 1/2)]^{1/2}$ gilt für freie Elektronen $E = -[\mu^2 + p^2 + p_n^2]^{1/2}$, wo p und p_n die Impulskomponenten parallel und senkrecht zur z -Achse bedeuten. $\varepsilon^2(n + 1/2)$ entspricht also p_n^2 und dn entspricht daher $2p_n dp_n / \varepsilon^2$. Für freie Elektronen geht also dZ_g über in

$$dZ_g = L^3 \frac{2p_n dp_n dp}{2\pi\lambda^2 \varepsilon^2 2\pi\hbar c}. \quad (55)$$

Da $\lambda^2 \varepsilon^2 = 2(\hbar c)^2$, wird

$$dZ_g = L^3 \frac{2\pi p_n dp_n dp}{(2\pi\hbar c)^3}. \quad (56)$$

Diese Formel gibt tatsächlich den richtigen Wert an, da $2\pi p_n dp_n dp$ das Volumelement im Impulsraum.

Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir zu Gl. (51) zurück und erhalten durch Multiplikation von $\varrho'(E')$ mit der Zahl Z von Gl. (53) eine effektive Dichte der Endzustände

$$\varrho(E') = \frac{L^3}{2\pi\hbar c 2\pi\lambda^2} \frac{E'_-}{|p'|}. \quad (57)$$

Unter Berücksichtigung, daß nach Gl. (24) $|H'|^2 \sim L^{-3}$ und $\varrho(E') \sim L^3$ wird die Übergangswahrscheinlichkeit w unabhängig von L . Diese Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit besteht dann, wenn sich in dem Würfel mit der Kantenlänge L ein Lichtquant befindet. Es treten in diesem Fall c/L Lichtquanten pro Zeiteinheit durch die auf der Einfallrichtung senkrecht stehende Fläche L^2 und c/L^3 Lichtquanten pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit. Bezogen auf den Einfall von einem Lichtquant pro Zeit- und Flächeneinheit ergibt sich daher für die Übergangswahrscheinlichkeit oder den Wirkungsquerschnitt $Q_{n,n'} = w L^3 / c$. Nach Gl. (23), (24) und (57) enthält $Q_{n,n'}$ den Faktor $\varepsilon^2 / \lambda^2$. Wir führen durch $\varepsilon^2 = \alpha_0 \hbar c$ die Feinstrukturkonstante $\alpha_0 = 1/137,0$ ein, eliminieren λ mit Hilfe der Beziehung $(\lambda \varepsilon)^2 = 2(\hbar c)^2$ und verwenden schließlich $\hbar c = \lambda_0 \mu$, wo $\lambda_0 = 3,86 \cdot 10^{-11}$ cm, die durch 2π dividierte COMPTON-Wellenlänge bedeutet. Mit diesen Umformungen ergibt sich

$$Q_{n,n'} = L^3 \frac{\alpha_0}{\lambda_0} \frac{\varepsilon^2}{2\mu k} \frac{E'_-}{|p'|} |I|^2. \quad (58)$$

Der Wirkungsquerschnitt enthält den Faktor L^3 . Tatsächlich muß die Zahl der erzeugten Paare dem Volumen proportional sein.

Für $|I|^2$ finden wir nach Gl. (26) und (46) mit $p = p'$ und $\alpha^2/2 = k^2/\varepsilon^2$

$$|I|^2 = \frac{1}{4\pi} (G_+ G'_- p')^2 (E_- - E_+)^2 \frac{\varepsilon}{k} n^{-\frac{1}{2}} \quad (59)$$

$$\frac{n!}{n'!} n^{n'-n} \frac{1}{\sin \Phi} e^{-(n+n'+1)(\sin 2\Phi - 2\Phi)},$$

wobei nach Gl. (45)

$$\frac{k^2}{\varepsilon^2} = 2(n + n' + 1) \cos^2 \Phi. \quad (60)$$

Um den Impuls p' durch die Quantenzahlen n und n' auszudrücken, machen wir von dem Energiesatz $k + E_+ = E_-$ oder

$$k - [\mu^2 + p^2 + \varepsilon^2(n+1)]^{1/2} = [\mu^2 + p'^2 + \varepsilon^2 n']^{1/2} \quad (61)$$

Gebrauch. Da $p = p'$ ergibt sich

$$\left(\frac{p'}{k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^4 (n' - n - 1)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^2 (n' + n + 1) - \left(\frac{\mu}{k}\right)^2. \quad (62)$$

Wenn $(n' - n)^2 \leq (n' + n)$ kann man wegen $\varepsilon/k \ll 1$ das Glied mit $(\varepsilon/k)^4 (n' - n - 1)^2$ vernachlässigen und die Beziehung

$$\left(\frac{p'}{k}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^2 (n' + n + 1) - \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 \quad (63)$$

verwenden.

In Gl. (58) ist für $|I|^2$ der Wert von Gl. (59) einzusetzen. Untersuchen wir zunächst die Faktoren $(n! / n'!) n^{n'-n}$. Mit Hilfe der STIRLING'schen Näherungsformel für $n!$ und $n'!$ erhalten wir

$$\frac{n!}{n'!} n^{n'-n} = \left(\frac{n}{n'}\right)^{1/2} e^{n'-n} \left(\frac{n}{n'}\right)^{n'}. \quad (64)$$

Wir setzen

$$e^{n'-n} \left(\frac{n}{n'}\right)^{n'} = e^f \quad (65)$$

und betrachten jene Übergänge, für die

$$n' + n = 2m \quad (66)$$

einen festen Wert besitzt. Wir setzen versuchsweise

$$n' = m(1 + \delta), \quad n = m(1 - \delta), \quad \delta \ll 1, \quad (67)$$

so daß

$$e^f = e^{2m\delta} \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^{m(1+\delta)}. \quad (68)$$

Es wird also

$$f = 2m\delta + m(1 + \delta) [\log(1 - \delta) - \log(1 + \delta)]. \quad (69)$$

Durch Entwickeln der Logarithmen von $(1 - \delta)$ und $(1 + \delta)$ in Potenzreihen findet man

$$f = -2m\delta^2 \left(1 + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{3} + \frac{\delta^3}{5} + \frac{\delta^4}{5} + \dots \right) \quad (70)$$

In erster Näherung wird also

$$e^f = e^{-2m\delta^2}. \quad (71)$$

Die Funktion e^f besitzt für große Werte von m ein sehr scharfes Maximum an der Stelle $\delta = 0$ oder $n' = n$. Wegen des raschen Abfalles dieser Funktion an beiden Seiten des Maximums kann daher in allen anderen Größen, die in Gl. (58) auftreten, $n' = n$ gesetzt werden. Da e^f sehr klein ist, wenn nicht $2m\delta^2 \leq 1$, wird durch $n' - n = 2m\delta$ die zur Herleitung der Gl. (63) verwendete Annahme $(n' - n)^2 \leq (n' + n)$ gerechtfertigt.

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes, der aus allen möglichen Übergängen resultiert, wird man zweckmäßigerweise zuerst über solche Übergänge summieren, für welche $n' + n = 2m$ einen festen Wert besitzt. Diese Summation betrifft aber nur die Funktion e^f . Da sich bei der Summation $n' - n$ jeweils um zwei Einheiten ändert und $n' - n = 2m\delta$, so ist die Summation zu ersetzen durch

$$m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2m\delta^2} d\delta = \frac{1}{2} (2\pi m)^{1/2}. \quad (72)$$

Aus den Gln. (58) und (59) ergibt sich nach Ausführung der Summation mit $n' = n = m$ und bei Berücksichtigung, daß $E_- - E_+ = k$ ein Wirkungsquerschnitt

$$Q_m = L^3 \frac{\alpha_0}{\lambda_0} \frac{1}{8} (2\pi)^{-1/2} \frac{\varepsilon^3}{\mu k^2} E_- |p'| (G_+ G_-)^2 k^2 \frac{1}{\sin \Phi} e^{-(2m+1)(\sin 2\Phi - 2\Phi)}, \quad (73)$$

wobei nach Gl. (60)

$$\frac{k^2}{\varepsilon^2} = 2(2m+1) \cos^2 \Phi \quad (74)$$

und nach Gl. (63)

$$\left(\frac{p'}{k} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^2 (2m+1) - \left(\frac{\mu}{k} \right)^2. \quad (75)$$

In Gl. (73) kann der Exponent von e nach Gl. (74) durch

$$- \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{k^2}{\varepsilon^2} \right) \frac{(\sin 2\Phi - 2\Phi)}{\cos^2 \Phi}$$

ersetzt werden. Da $k \gg \varepsilon$ ist das Produkt der Exponentialfunktion mit $1/\sin \Phi$ verschwindend klein, wenn nicht $\Phi \ll 1$. Damit wird aber nach Gl. (74) unsere Voraussetzung $m \gg 1$ bestätigt. Für kleine Φ wird näherungsweise

$$Q_m = L^3 \frac{\alpha_0}{\lambda_0} \frac{1}{8} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon^3}{\mu k^2} E'_- |p'| (G_+ G'_-)^2 k^2 \frac{1}{\Phi} e^{-\frac{2}{3} \frac{k^3}{\varepsilon^3} \Phi^3} \quad (76)$$

und

$$\left(\frac{p'}{k}\right)^2 = \frac{1}{4} \Phi^2 - \left(\frac{\mu}{k}\right)^2. \quad (77)$$

Danach ist

$$\Phi \geq \Phi_0 = 2 \frac{\mu}{k}. \quad (78)$$

Der Exponent von e in Gl. (76) ist daher kleiner oder gleich

$$-\left(\frac{16}{3}\right) \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{\mu}{k}\right)^3 = -\left(\frac{16}{3}\right) \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{\mu}{k}\right).$$

Wegen $n' = n \gg 1$, $p' = p$ wird $E'_- = -E_+ = k/2$. Aus Gl. (22) folgt mit $k \gg \mu$ die Näherung $(G_+ G'_-)^2 = 4/k^4$. Schließlich ergibt sich aus Gl. (77) und (78)

$$|p'| = \frac{k}{2} (\Phi^2 - \Phi_0^2)^{1/2}. \quad (79)$$

Q_m ist jener Wirkungsquerschnitt, den die Übergänge mit $n' + n = 2m$ liefern. Um alle möglichen Übergänge zu berücksichtigen, muß noch über alle ganzen Zahlen $2m$ summiert werden. Wir werden die Summation wieder durch eine Integration ersetzen. Nach Gl. (74) ist für $\Phi \ll 1$

$$2m = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\varepsilon^2} (1 - \Phi^2), \quad |d(2m)| = \frac{k^2}{\varepsilon^2} \Phi d\Phi. \quad (80)$$

Nach Multiplikation mit dem Faktor 2 zur Berücksichtigung der positiven und negativen Werte von m ergibt sich näherungsweise

$$Q = L^3 \frac{\alpha_0}{\lambda_0} \frac{1}{4} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu} \int_{\Phi_0}^{\infty} (\Phi^2 - \Phi_0^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3} \frac{k^3}{\varepsilon^3} \Phi^3} d\Phi. \quad (81)$$

Mit $\Phi/\Phi_0 = x$, $\Phi_0 = 2\mu/k$ und bei Verwendung der Abkürzung

$$\frac{16}{3} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^2 \frac{\mu}{k} = \alpha \quad (82)$$

erhalten wir

$$Q = L^3 \frac{\alpha_0}{\lambda_0} \frac{1}{128} \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^4 \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{16}{3} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^3 \frac{\mu}{k}} A(\alpha), \quad (83)$$

wobei

$$A(\alpha) = 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} (3\alpha)^{\frac{3}{2}} e^{\alpha} \int_1^{\infty} (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha x^3} dx. \quad (84)$$

Das Integral in $A(a)$ kann für $a \gg 1$ näherungsweise berechnet werden. Wegen des raschen Abfalles der Exponentialfunktion wird der Integrand nur in der Nähe von $x = 1$ einen merklichen Beitrag liefern, so daß mit $x = 1 + \xi$

$$A(a) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} (3a)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-3a\xi} d\xi. \quad (85)$$

Mit Hilfe der Substitution $\xi^{1/2} = v$ ergibt sich

$$A(a) = 1, \quad a \gg 1. \quad (86)$$

Der in Gl. (83) und (84) angegebene Wirkungsquerschnitt wird durch die Übergänge $q_+^* \alpha_x q_-'$ erzeugt. Einen gleich großen Wirkungsquerschnitt liefern die Übergänge $q_-^* \alpha_x q_+'$. Dagegen ist der Beitrag der Übergänge $q_-^* \alpha_z q_-'$ und $q_+^* \alpha_z q_+'$ bei Absorption von Lichtquanten, die in der z -Richtung polarisiert sind, verschwindend klein. Für $q_+^* \alpha_z q_-'$ findet man nämlich

$$I = G_- G_-' [\rho(\mu + E_-) + \rho'(\mu + E_-)] I_{n,n'}. \quad (87)$$

Wegen $\rho' = \rho$ und $E_- = -E_+$ enthält die eckige Klammer den Faktor 2μ an Stelle des Faktors $E_- - E_+ = k$ in Gl. (26). Die anderen Übergänge $q_-^* \alpha_x q_-'$, $q_+^* \alpha_x q_+'$, $q_+^* \alpha_z q_-'$ und $q_-^* \alpha_z q_+'$ besitzen gleich große Wirkungsquerschnitte. Für $q_-^* \alpha_x q_-'$ findet man etwa

$$I = G_- G_-' \varepsilon [(\mu + E_-) n'^{1/2} I_{n,n'-1} + (\mu + E_-) n^{1/2} I_{n-1,n'}]. \quad (88)$$

Diesem Ausdruck entspricht der Wirkungsquerschnitt

$$Q' = L^3 \frac{\alpha_0}{\lambda_0} \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{16}{3} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{k}} \frac{\mu}{k}} A'(a) \quad (89)$$

mit

$$A'(a) = 2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} (3a)^{\frac{1}{2}} e^a \int_1^{\infty} (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} e^{-ax^2} dx, \quad (90)$$

wobei $A'(a) = 1$ für $a \gg 1$.

Da die Wirkungsquerschnitte Q und Q' verschwindend klein sind, wenn nicht k/μ in der Größenordnung von $(\mu/\varepsilon)^2$, sind die Produkte $(\varepsilon/\mu)^4 (\mu/k)^{1/2}$ und $(\varepsilon/\mu)^2 (\mu/k)^{3/2}$ von gleicher Größenordnung. Wenn die einfallenden Lichtquanten unpolarisiert sind, muß über die Übergänge mit α_x und α_z gemittelt werden. Für den gesamten Wirkungsquerschnitt ergibt sich daher $Q_g = Q + 2Q'$. Der Wirkungsquerschnitt pro $\text{cm}^3 Q_g/L^3$ ist für $(\varepsilon/\mu)^2 = 1 \cdot 10^{-9}$ entsprechend einer magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H} = 2,21 \cdot 10^4$ Oersted, als Funktion von k/μ mit der Näherung $A(a) = 1$ und $A'(a) = 1$ graphisch dargestellt.

Durch Q_g/L^3 wird die Zahl der im Magnetfeld pro cm^3 erzeugten Elektron-Positron-Paare angegeben, wenn senkrecht zur Feldrichtung ein Lichtquant pro cm^2 einfällt. Der Quotient k/μ bezeichnet das Verhältnis der Lichtquantenenergie zur Ruhenergie eines Elektrons. Da μ

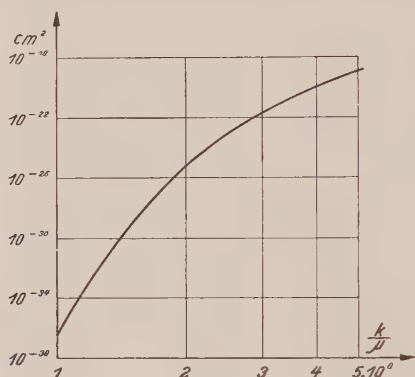


Abb. 1. Der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung in einem homogenen Magnetfeld für $(e/\mu)^2 = 1 \cdot 10^{-9}$ als Funktion von k/μ .

etwa $0,5 \cdot 10^6$ eV beträgt, ist der Wirkungsquerschnitt gemessen an der Einheit 10^{-24} cm^2 selbst in starken Magnetfeldern verschwindend klein, wenn nicht die Lichtquanten Energien in der Größenordnung von 10^{14} eV besitzen. Dieser Wert liegt nahe an der Grenze der Energien, welche die kosmische Strahlung zur Verfügung stellt.

Die Energieabhängigkeit der Phasenverschiebung bei der Proton-Proton-Streuung.

Von

Herbert Überall.

Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

(Eingelangt am 21. Februar 1952.)

Zusammenfassung.

Es wird eine Potenzreihenentwicklung einer einfachen Funktion der Phasenverschiebung nach der Relativenergie der einfallenden Teilchen angegeben. Dazu werden die quantenmechanischen Übergangsbedingungen für die radiale Wellenfunktion am Kernradius r_0 benützt. Die Koeffizienten der Entwicklung sind in expliziter Form berechnet — im Gegensatz zur Integraldarstellung, die von einigen Autoren gegeben wurde — und erweisen sich als modifizierte BESSEL-Funktionen mit einem vom Kernradius r_0 und vom BOHRschen Radius a abhängigen Argument.

I. Allgemeine Einführung.

Die Streutheorie von GUTH und SEXL¹ liefert ein Integral ψ der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\Delta \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0, \quad (1)$$

wobei folgendes Potential verwendet wird:

$$V = \begin{cases} \frac{Z Z' e^2}{r} & \text{für } r > r_0, \\ V(r) & \text{für } r < r_0, \end{cases}$$

also im Außenraum das abstoßende COULOMB-Potential zwischen dem einfallenden Teilchen der Ladung $Z'e$ und dem ruhenden Kern der Ladung Ze ; im Kerninneren wird irgendein kugelsymmetrisches Potential $V(r)$ vorgegeben. Bei numerischen Rechnungen findet dafür wegen seiner mathematischen Einfachheit das Potential $V(r) = U = \text{const.}$ Verwendung; die Zulässigkeit dieser willkürlichen Annahme wird später noch genauer begründet.

¹ GUTH, E. und TH. SEXL, Z. Physik **66**, 557 (1930); Zusammenfassung in TH. SEXL, „Vorlesungen über Kernphysik“ (Verl. Deuticke, Wien, 1948, 8. und 9. Vorlesung).

Die Theorie gibt das gesuchte Integral von Gl. (1) in folgender Gestalt:

$$r < r_0 \quad \psi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k r} i^l (2l+1) A_l \chi_l^{(i)} P_l(\cos \vartheta), \quad (2a)$$

$$r > r_0 \quad \psi = \psi_a + C \psi_a^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k r} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{i\varphi} \left\{ \chi_l + \frac{1}{2} C_l \chi_l^{(1)} \right\} P_l(\cos \vartheta), \quad (2b)$$

wobei P_l das l -te LEGENDRESche Polynom und A_l und C_l Normierungskonstante bedeuten; die anderen Bezeichnungen sind

$$\varphi = \arg \Gamma\left(\frac{i}{a k} + l + 1\right), \quad a = \frac{\hbar^2}{\mu Z Z' e^2}$$

(der verallgemeinerte BOHRsche Radius); μ ist die reduzierte Masse des einfallenden Teilchens; k ist die Wellenzahl der als de BROGLIE-Wellen dargestellten einfallenden Teilchen und hängt mit der Relativenergie $E = \mu v^2/2$ derselben durch die Gleichung

$$k^2 = 2\mu \frac{E}{\hbar^2}$$

zusammen. ϑ ist der Winkel zwischen Einfall- und Streurichtung.

$\chi_l(kr)$ und $\chi_l^{(1)}(kr)$ sind die mit kr multiplizierten radialen Wellenfunktionen des Problems; sie genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} + \left(1 - \frac{2/a k}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) \chi = 0 \quad (3)$$

mit $x = kr$ und besitzen die asymptotische Darstellung für große kr :

$$\chi_l \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi - \frac{\ln 2kr}{ak} + \varphi\right),$$

$$\chi_l^{(1)} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp i\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi - \frac{\ln 2kr}{ak} + \varphi\right).$$

Ein weiteres Integral von Gl. (3) ist $\chi_l^{(2)}$, das zu $\chi_l^{(1)}$ konjugiert komplex ist; die Zusammensetzung der beiden Partikulärintegrale $\chi_l^{(1)}$, $\chi_l^{(2)}$ ergibt $\chi_l = (1/2)(\chi_l^{(1)} + \chi_l^{(2)})$; χ_l ist daher reell. Bildet man den Ausdruck $\omega_l = (1/2i)(\chi_l^{(1)} - \chi_l^{(2)})$, so erhält man ein weiteres reelles Integral von Gl. (3) mit der asymptotischen Darstellung

$$\omega_l \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(kr - \frac{l+1}{2}\pi - \frac{\ln 2kr}{ak} + \varphi\right).$$

$\chi_l^{(i)}$ ist die mit kr multiplizierte radiale Wellenfunktion im Kerninneren; nimmt man das Innenpotential konstant $= U$ an und setzt man $2\mu U/\hbar^2 = U_1$, so ist sie Integral von

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left(k^2 - U_1 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \chi = 0$$

und lautet

$$\chi_l^{(i)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(k^2 - U_1)^{1/2} r} J_{l+1/2} \left((k^2 - U_1)^{1/2} r \right). \quad (4)$$

Die physikalische Bedeutung der Wellenfunktion ψ im Außenraum wird aus ihrer asymptotischen Darstellung für große $k r$ ersichtlich:

$$\psi_a \sim J + f(\vartheta) S$$

mit

$$J = e^{i k r \cos \vartheta + i \alpha}, \quad S = \frac{1}{r} e^{i k r + i \beta}$$

stellt eine ebene einfallende Welle J und eine gestreute Kugelwelle S dar, die allerdings durch das weitreichende COULOMB-Feld modifiziert sind (α, β sind Zusatzfunktionen von $\ln r$).

$\psi_a^{(1)}$ stellt, da es $\chi_l^{(1)}$ enthält, eine vom Kern weglauende Welle dar und bedeutet eine durch die einfallenden Teilchen bewirkte erzwungene Schwingung des Kerns; die Amplitude dieser erzwungenen Schwingung ist durch die Konstante C bestimmt.

Die Aufspaltung von ψ in eine unendliche Summe bedeutet eine Trennung des einfallenden Teilchenstroms in Teilströme mit dem Drehimpuls $\hbar \sqrt{l(l+1)}$ bezüglich des Kerns.

Die Amplitude der überlagerten erzwungenen Schwingung des Kerns ermittelt man aus den Übergangsbedingungen: Die Forderung nach glattem Übergang der Wellenfunktionen am Kernradius r_0 ergibt die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} A \psi_i = \psi_a + C \psi_a^{(1)} \\ A \frac{d\psi_i}{dr} = \frac{d\psi_a}{dr} + C \frac{d\psi_a^{(1)}}{dr} \end{array} \right|_{r=r_0},$$

welche nach dem Drehimpulssatz in die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} A_l \chi_l^{(i)} = \chi_l + \frac{C_l}{2} \chi_l^{(1)} \\ A_l \chi_l^{(i)'} = \chi_l' + \frac{C_l}{2} \chi_l^{(1)'} \end{array} \right|_{r=r_0}$$

zerfallen. Durch Elimination von A_l und wegen der Beziehung $\chi_l^{(1)} = \chi_l + i \omega_l$ erhält man daraus

$$C_l = -2 \frac{\chi_l^{(i)'} \chi_l - \chi_l' \chi_l^{(i)}}{\chi_l^{(i)'} \chi_l - \chi_l' \chi_l^{(i)} + i (\chi_l^{(i)'} \omega_l - \omega_l' \chi_l^{(i)})} \Big|_{r=r_0}. \quad (5)$$

Ferner kann man Gl. (2 b) in der Form schreiben:

$$\psi = \left(\frac{1}{k r} \right) \sum \text{const.} \frac{1}{2} [\chi_l^{(1)} (C_l + 1) + \chi_l^{(2)}],$$

also ψ in einfallende und weglauende Wellen zerlegen; wegen der Erhaltung der Teilchenzahl bei der elastischen Streuung gilt $|C_e + 1|^2 = 1$; daher wird

$$C_l + 1 = e^{2i\delta_l} \quad (6)$$

und man sieht, daß die einfallende Welle bei der Streuung eine Phasenverschiebung δ_l erleidet. Aus Gl. (6) folgt:

$$\operatorname{ctg} \delta_l = \left(-\frac{1}{2} i C_l \right)^{-1} + i \quad (7)$$

und aus den Gln. (5) und (7):

$$\operatorname{ctg} \delta_l = \frac{\omega_l - Q_l \omega_l'}{\chi_l - Q_l \chi_l'} \bigg|_{r=r_0}, \quad Q_l = \frac{\chi_l^{(i)}}{\chi_l^{(i)'}}. \quad (8)$$

II. Darstellung der Phasenverschiebung als Potenzreihe.

LANDAU und SMORODINSKI² führten für den Spezialfall $l = 0$ die Funktion ein:

$$f_0 = \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta_0}{e^{2\pi/ak} - 1} + \ln a k + \Re \Psi \left(\frac{i}{ak} + 1 \right),$$

$\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, \Re = Realteil.

Sie setzten sie näherungsweise konstant. Durch Vergleich mit Experimenten bei kleinen Energien zeigte sich aber, daß f_0 eine nahezu lineare Funktion der Energie der einfallenden Teilchen war. Die Autoren sprachen daher die Vermutung aus, daß f_0 eine Potenzreihe der Energie, also von k^2 sein müsse. Seit dieser Zeit (1944) ist es einigen Autoren mittels mehr oder weniger komplizierter Methoden gelungen, tatsächlich die Koeffizienten dieser Potenzreihe darzustellen: CHEW und GOLDBERGER³ gingen, wie die Autoren der beiden folgenden Arbeiten, von der Radialgleichung selbst aus und stellten, für $l = 0$ explizit, für $l = 1$ andeutungsweise, die Koeffizienten der ersten drei Glieder dieser Potenzreihe in einer nicht sehr einfachen Form dar. JACKSON und BLATT⁴ verwendeten, ebenfalls für $l = 0$, eine von SCHWINGER angegebene Variationsmethode dazu; auch BETHE⁵ ermittelte für $l = 0$ die beiden ersten Glieder der Reihe; seine Methode ist einfacher und hat den Vorteil, daß sie eine Entwicklung nicht nur um $k = 0$, sondern um jedes beliebige $k = k_0$ gestattet. Der Nachteil dieser drei Arbeiten ist aber der, daß die Koeffizienten als bestimmte Integrale der ohnehin schon genug komplizierten Wellenfunktionen gegeben werden, die numerisch ausgewertet werden müssen. KUSHNERIUK und PRESTON⁶ verallgemeinerten BETHES Methode auf $l \neq 0$. In einer früheren Arbeit jedoch zeigten BREIT und BOURICIUS⁷ schon die Möglichkeit auf, in viel einfacherer Weise die ersten Glieder

² L. LANDAU u. J. SMORODINSKI, J. Phys. USSR, 8, 154 (1944), 8, 219 (1944); 11, 195 (1947).

³ G. F. CHEW u. M. L. GOLDBERGER, Phys. Rev. 75, 1637 (1949).

⁴ J. D. JACKSON u. J. M. BLATT, Rev. Mod. Phys. 22, 77 (1950).

⁵ H. A. BETHE, Phys. Rev. 76, 38 (1949).

⁶ S. A. KUSHNERIUK u. M. A. PRESTON, Proc. Phys. Soc. 64, 712 (1951).

⁷ G. BREIT u. W. G. BOURICIUS, Phys. Rev. 75, 1029 (1949).

der Reihe aus den Übergangsbedingungen herzuleiten, und gaben für den Spezialfall $l = 0$ die numerischen Werte der Koeffizienten an.

Die vorliegende Arbeit soll nun aus den bekannten Wellenfunktionen mit Hilfe der Übergangsbedingungen die beiden ersten Koeffizienten der Reihe für alle l explizit und in Form von tabellierten Funktionen angeben.

Die genaue Form der beiden Radialwellenfunktionen χ_l und ω_l lautet nach der GUTH-SEXLSchen Theorie:

$$\chi_l = N \frac{e^{i k r} (k r)^{l+1}}{(2l+1)!} F, \quad (9)$$

$$\omega_l = -\frac{e^{2\pi/a k} - 1}{\pi} \left\{ \chi_l \ln 2 k r + N \frac{(k r)^{l+1}}{(2l+1)!} \Re [e^{i k r} F_1] \right\}$$

mit den Abkürzungen

$$N = \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\pi/2 a k} \Gamma \left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right) \right| 2^l$$

$$F \equiv F \left(\frac{i}{a k} + l + 1, 2l + 2, -2 i k r \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right)_n (-2 i k r)^n}{(2l+2)_n n!},$$

$$F_1 \equiv F_1 \left(\frac{i}{a k} + l + 1, 2l + 2, -2 i k r \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right)_n (-2 i k r)^n}{(2l+2)_n n!} \left\{ \Psi \left(\frac{i}{a k} + l + 1 + n \right) - \Psi(n+1) - \right.$$

$$\left. - \Psi(n+2l+2) \right\} -$$

$$- \frac{(2l+1)! (2l)!}{(-2 i k r)^{2l+1} \left(-\frac{i}{a k} - l \right)_{2l+1}} \sum_{n=0}^{2l} \frac{\left(\frac{i}{a k} - l \right)_n (-2 i k r)^n}{(-2l)_n n!}.$$

Das Symbol $(a)_n$ bedeutet $(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$, $(a)_0 = 1$. χ_l ist das an $r = 0$ reguläre, ω_l das irreguläre Integral der Differentialgleichung (3).

Mittels der Umformung $\ln 2 k r = \ln k a + 2 \ln (2 r/a)^{1/2}$ kann das irreguläre Integral in der Form geschrieben werden:

$$\omega_l = -\frac{1}{\pi} (e^{2\pi/a k} - 1) N (k r)^{l+1} \{ u_l h(k) + v_l \} \quad (10)$$

mit den Bezeichnungen

$$u_l = \frac{1}{(2l+1)!} e^{i k r} F, \quad v_l = \Re \frac{1}{(2l+1)!} e^{i k r} X, \quad (10 a)$$

$$h(k) = \ln k a + \Re \Psi \left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right), \quad (10 \text{ b})$$

$$\frac{1}{(2l+1)!} X = X_1 + X_2 + X_3, \quad (10 \text{ c})$$

$$X_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right)_n}{(n + 2l + 1)!} \frac{(-2 i k r)^n}{n!} \left\{ \ln \sqrt{\frac{2r}{a}} + C - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n+2l+1} \frac{1}{\nu} \right\},$$

$$X_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right)_n}{(n + 2l + 1)!} \frac{(-2 i k r)^n}{n!} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\frac{i}{a k} + l + \nu} \right),$$

$$X_3 = - \frac{(2l)!}{(-2 i k r)^{2l+1} \left(-\frac{i}{a k} - l \right)_{2l+1}} \sum_{n=0}^{2l} \frac{\left(\frac{i}{a k} - l \right)_n}{(-2l)_n} \frac{(-2 i k r)^n}{n!}.$$

Dabei wurden die Formeln benützt⁸:

$$\Psi(x + n + 1) = \Psi(x + 1) + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{x + \nu}, \quad \Psi(1) = -C$$

(C ist die EULER-MASCHERONISCHE Konstante $C = 0,5772\dots$).

In die Formel (8) eingesetzt, erhält man

$$\frac{\pi \operatorname{ctg} \delta_l}{e^{2\pi i/a k} - 1} = - \frac{(k r)^{l+1} (u_l h + v_l) - Q_l \frac{d}{dr} [(k r)^{l+1} (u_l h + v_l)]}{(k r)^{l+1} u_l - Q_l \frac{d}{dr} [(k r)^{l+1} u_l]} \bigg|_{r=r_0}$$

und durch einfache Umformung, bzw. Ausrechnung

$$\begin{aligned} f_l &\equiv \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta_l}{e^{2\pi i/a k} - 1} + \ln k a + \Re \Psi \left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right) = \\ &= - \frac{v_l - Q_l \left(\frac{l+1}{r} v_l + \frac{d}{dr} v_l \right)}{u_l - Q_l \left(\frac{l+1}{r} u_l + \frac{d}{dr} u_l \right)} \bigg|_{r=r_0} \end{aligned} \quad (11)$$

⁸ Vgl. E. JAHNKE u. F. EMDE, Funktionentafeln (Verl. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1909).

wobei die nicht in eine Potenzreihe um $k = 0$ entwickelbaren Glieder auf die linke Seite gebracht werden. Die rechte Seite aber ist in Form einer Potenzreihe in k^2 darstellbar. Zu diesem Zweck entwickelt man u_l und v_l nach k^2 . Details dieser Entwicklung werden im Anhang erläutert; das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} u_l &= u_l^{(0)} + k^2 u_l^{(1)} + \dots \\ v_l &= v_l^{(0)} + k^2 v_l^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

mit

$$\begin{aligned} u_l^{(0)} &= \left(\frac{2r}{a}\right)^{-l-\frac{1}{2}} I_{2l+1} \left(2\sqrt{\frac{2r}{a}}\right), \\ u_l^{(1)} &= -\frac{r^2}{3} \left[\left(\frac{2r}{a}\right)^{-l-1} I_{2l+2} + l \left(\frac{2r}{a}\right)^{-l-\frac{3}{2}} I_{2l+3} \right], \end{aligned} \quad (12 a)$$

$$\begin{aligned} v_l^{(0)} &= -2 \left(\frac{2r}{a}\right)^{-l-\frac{1}{2}} K_{2l+1}, \\ v_l^{(1)} &= \frac{2r^2}{3} \left[\left(\frac{2r}{a}\right)^{-l-1} K_{2l+2} + l \left(\frac{2r}{a}\right)^{-l-\frac{3}{2}} K_{2l+3} \right] - \\ &\quad - (6l^2 + 6l + 1) \frac{r^2}{3} \left(\frac{2r}{a}\right)^{-l-\frac{1}{2}} I_{2l+1}, \end{aligned} \quad (12 b)$$

wobei I_n und K_n die in WHITTAKER-WATSON⁹ definierten modifizierten BESSEL-Funktionen erster und zweiter Art sind:

$$I_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2r}}{r! (n+r)!} \quad (12 c)$$

$$\begin{aligned} K_n(z) &= -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2r}}{r! (n+r)!} \left\{ \ln \frac{1}{2} z + C - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n+r} \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^r \frac{1}{m} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} z\right)^{-n+2r} \frac{(-1)^{n-r} (n-r-1)!}{r!}. \end{aligned} \quad (12 d)$$

Das Argument der BESSEL-Funktionen in Gl. (12 a), (12 b) ist stets $2\sqrt{2r/a}$. Mit Hilfe der für I_n und K_n gültigen Differentialbeziehung

$$\frac{d}{dz} (z^{-n} I_n(z)) = z^{-n} I_{n+1}(z)$$

berechnet man sich sofort

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{r} u_l + \frac{d}{dr} u_l &= \bar{u}_l^{(0)} + k^2 \bar{u}_l^{(1)} + \dots, \\ \frac{l+1}{r} v_l + \frac{d}{dr} v_l &= \bar{v}_l^{(0)} + k^2 \bar{v}_l^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

⁹ E. T. WHITTAKER u. G. N. WATSON, „A Course of Modern Analysis“, Cambridge University Press, 4. Aufl. 1946.

mit

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_l^{(0)} &= \frac{l+1}{r} \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-\frac{1}{2}} I_{2l+1} + \frac{1}{r} \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l} I_{2l+2} \\
 \bar{u}_l^{(1)} &= -\frac{r}{3} (2l+3) \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-1} I_{2l+2} + \frac{r}{3} \left(l^2 - \frac{2r}{a} \right) \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-\frac{3}{2}} I_{2l+3} \\
 \bar{v}_l^{(0)} &= -2 \frac{l+1}{r} \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-\frac{1}{2}} K_{2l+1} - \frac{2}{r} \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l} K_{2l+2} \\
 \bar{v}_l^{(1)} &= \frac{2r}{3} (2l+3) \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-1} K_{2l+2} - \\
 &\quad - \frac{2r}{3} \left(l^2 - \frac{2r}{a} \right) \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-\frac{3}{2}} K_{2l+3} - \\
 &\quad - (6l^2 + 6l + 1) \frac{r}{3} \left[(l+1) \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-\frac{5}{2}} I_{2l+1} + \left(\frac{2r}{a} \right)^{-l-2} I_{2l+2} \right];
 \end{aligned} \tag{13 a}$$

wieder ist in allen Fällen das Argument der BESSEL-Funktionen $2\sqrt{2r/a}$. Zur Umformung wurde dabei auch die für I_n und K_n gültige Rekursionsformel

$$I_{n-1} - I_{n+1} = n \left(\frac{z}{2} \right)^{-1} I_n$$

benützt.

Nimmt man an, daß die Wellenfunktion im Kerninneren $\chi_l^{(i)}$ gegeben ist, so berechnet sich die Reihenentwicklung von

$$Q_l = \frac{\chi_l^{(i)}}{\frac{d}{dr} \chi_l^{(i)}} \quad \text{zu}$$

$$Q_l = Q_l^{(0)} + k^2 Q_l^{(1)} + \dots \tag{14}$$

mit

$$\begin{aligned}
 Q_l^{(0)} &= \left. \frac{\chi_l^{(i)}}{\chi_l^{(i)'}} \right|_{k=0} \\
 Q_l^{(1)} &= \left. \frac{\partial}{\partial k^2} \left(\frac{\chi_l^{(i)}}{\chi_l^{(i)'}} \right) \right|_{k=0};
 \end{aligned} \tag{14 a}$$

letztere Ausdrücke sind im Fall des konstanten Innenpotentials leicht aus der Formel (4) zu berechnen.

Setzt man nun die Reihen (12), (13) und (14) in die Gl. (11) ein, so erhält man die gesuchte Potenzreihe:

$$f_l \equiv \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta_l}{e^{2\pi i a k} - 1} + \ln a k + \Re \Psi \left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right) = -\frac{1}{a_l} + \frac{1}{2} Q_l k^2 + \dots \tag{15}$$

mit

$$\alpha_l = \frac{u_l^{(0)} - Q_l^{(0)} \bar{u}_l^{(0)}}{v_l^{(0)} - Q_l^{(0)} \bar{v}_l^{(0)}} \Big|_{r=r_0} \quad (15 \text{ a})$$

$$Q_l = -\frac{2}{\alpha_l} \left[\frac{v_l^{(1)} - Q_l^{(1)} \bar{v}_l^{(0)} - Q_l^{(0)} \bar{v}_l^{(1)}}{v_l^{(0)} - Q_l^{(0)} \bar{v}_l^{(0)}} - \frac{u_l^{(1)} - Q_l^{(1)} \bar{u}_l^{(0)} - Q_l^{(0)} \bar{u}_l^{(1)}}{u_l^{(0)} - Q_l^{(0)} \bar{u}_l^{(0)}} \right] \Big|_{r=r_0} \quad (15 \text{ b})$$

Die Koeffizienten der Entwicklung können in Analogie zu einer ähnlichen Reihe in der Theorie der Neutron-Proton-Streuung¹⁰ als „FERMISCHE Streulänge“ α_l und „effektive Reichweite“ Q_l der l -ten Partialwelle bezeichnet werden.

CHEW und GOLDBERGER³ sowie KUSHNERIUK und PRESTON⁶ entwickelten in ihren Arbeiten den Ausdruck

$$f_l \cdot (l^2 + \eta^2) ((l-1)^2 + \eta^2) \dots (1 + \eta^2) \cdot \eta^{-2l}, \quad \eta = 1/a k, \quad (16)$$

multiplizierten also unser f_l noch mit einem Polynom in k^2 . Das erschwert jedoch die Auswertung der Reihe, da der zu entwickelnde Ausdruck selbst in viel komplizierterer Weise von der Energie abhängt als f_l allein. Der Zusammenhang von Gl. (16) mit (15) wird im Anhang näher erläutert.

Als Nebenresultat ergibt sich eine Reihenentwicklung des regulären (χ_l) und des irregulären Integrals (ω_l) der Radialwellengleichung (3) nach der Energie:

$$\chi_l = N(kr)^{l+1} \{u_l^{(0)} + k^2 u_l^{(1)} + \dots\} \quad (17 \text{ a})$$

$$\omega_l = -\frac{1}{\pi} (e^{2\pi/ak} - 1) N(kr)^{l+1} \{v_l^{(0)} + k^2 v_l^{(1)} + \dots + \\ + h(k) [u_l^{(0)} + k^2 u_l^{(1)} + \dots]\} \quad (17 \text{ b})$$

mit den Abkürzungen

$$N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\pi/2 a k} \left| \Gamma\left(\frac{i}{a k} + l + 1\right) \right| 2^l, \\ h(k) = \ln a k + \Re \Psi\left(\frac{i}{a k} + l + 1\right)$$

und mit den Reihen (12).

¹⁰ G. F. CHEW u. M. L. GOLDBERGER, Phys. Rev. **75**, 1637 (1949); J. M. BLATT u. J. D. JACKSON, Phys. Rev. **76**, 18 (1949); H. A. BETHE, Phys. Rev. **76**, 38 (1949); TH. SEXL u. H. ÜBERALL, Z. Physik, **132**, 72 (1952).

III. Diskussion.

Mit einigem Rechenaufwand wäre es möglich, auch noch den Koeffizienten von k^4 in der Reihe (15) mit den Methoden, die im Anhang benützt werden, anzugeben. Für Energien unterhalb 10 MeV, für welche die meisten und genauesten Versuchsergebnisse vorliegen, wird (15) jedoch vollkommen genügen. Trägt man f_l gegen k^2 auf, also gegen die Energie, so erhält man eine Gerade mit dem Abschnitt $-1/\alpha_l$ auf der positiven f_l -Achse und der Steigung $\varrho_l/2$. Diese gerade Linie wird auch durch die Experimente geliefert. Es handelt sich also darum, α_l und ϱ_l geeignet zu wählen. Auf diese Weise werden die in diesen Größen enthaltenen Parameter r_0 und U bestimmt (falls konstantes Innenpotential angenommen). Das heißt, man kann durch Streuexperimente bei kleinen Energien über das Innenpotential, also die „Kernkraft“, $p-p$ - (ebenso $n-p$ -) Wechselwirkung keine weitere Auskunft ermitteln als die Bestimmung der Reichweite und Tiefe desselben. Das steht im Einklang mit Feststellungen von CHEW und GOLDBERGER¹⁰, BLATT und JACKSON¹⁰ und BETHE¹⁰. Eine genauere Form des Innenpotentials ergibt sich also erst durch Streuexperimente bei höherer Energie, bzw. durch höhere Glieder der Reihe (15).

Außerdem wird, falls man die Reihe (15) nach dem zweiten Glied (k^2) abbricht, jedes beliebige Innenpotential gleich gut verwendbar, das von mindestens zwei Parametern abhängt; das ist bei den gebräuchlichen Potentialen (konstantes Potential, Exponential-, GAUSZ- und YUKAWA-Potential) stets der Fall; denn sobald aus den Streuexperimenten Abschnitt und Steigung der Geraden (15) bestimmt wurde, kann man diese zwei Parameter so wählen, daß die theoretischen Ausdrücke für α_l und ϱ_l die vom Experiment gelieferten Werte annehmen.

Zum Abschluß sei mit der Frage, in welcher Weise der Wert von f_l bei gegebener Energie aus den Experimenten bestimmt werden kann, auf die ausgezeichnete Arbeit von JACKSON und BLATT⁴ verwiesen, in der alle mit der Auswertung der Versuchsergebnisse zusammenhängenden Probleme sowohl für $l=0$ als auch für $l \neq 0$ erschöpfend behandelt werden.

IV. Anhang.

Wir benötigen eine Reihenentwicklung von u_l und v_l , bzw. von den Radialwellenfunktionen χ_l und ω_l nach der Energie auf die Art von Gl. (17). Eine solche Entwicklung von χ_l wurde bereits von mehreren Autoren unternommen: YOST, WHEELER und BREIT¹¹ berechneten die ersten Glieder direkt aus der Differentialgleichung (3); sie bemerkten nämlich, daß diese für $k=0$ in die Differentialgleichung der modifizierten BESSEL-Funktionen übergeht, und verwendeten zur Bestimmung der weiteren Glieder eine Störungsrechnung. BECKERLEY¹²

¹¹ F. L. YOST, J. A. WHEELER u. G. BREIT, Phys. Rev. **49**, 174 (1936).

¹² J. G. BECKERLEY, Phys. Rev. **67**, 11 (1945).

gibt Formeln für das allgemeine Glied, allerdings nur rekursiv, von dem gegebenen Integral χ_l ausgehend. Für das irreguläre Integral ω_l jedoch liegt bloß für den Spezialfall $l = 0$ eine Entwicklung vor, und zwar bei JACKSON und BLATT⁴. Da in der vorliegenden Arbeit eine Entwicklung für alle l benötigt wird, soll an dieser Stelle sowohl für χ_l als auch für ω_l nach ein und derselben Methode die Potenzreihe aufgestellt werden.

1. Entwicklung von $u_l = \frac{1}{(2l+1)!} e^{ikr} F$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2l+1)!} F &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{ak} + l + 1\right)_n}{(n+2l+1)!} \frac{(-2ikr)^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n (-iak)^n}{n! (n+2l+1)!} \left(-\frac{1}{iak} + l + 1\right) \dots \left(-\frac{1}{iak} + l + n\right) \end{aligned}$$

mit $b = 2r/a$. Die Ausmultiplikation eines Polynoms ergibt

$$(x - x_1) \dots (x - x_n) = \sum_{m=0}^n \sigma_{n-m} x^m, \quad (18)$$

wo σ_v die symmetrischen Grundfunktionen der Algebra bedeutet:

$$\sigma_v = (-1)^v \sum x_1 x_2 \dots x_v;$$

wir machen die Zusatzdefinition $\sigma_0 = 1$. Daher wird

$$\left(-\frac{1}{iak} + l + 1\right) \dots \left(-\frac{1}{iak} + l + n\right) (-iak)^n = \sum_{m=0}^n \sigma_m (iak)^m;$$

die Wurzeln des Polynoms sind in diesem Fall $l+1, l+2, \dots, l+n$. Es ergibt sich

$$\frac{1}{(2l+1)!} F = a_0 + a_1 ik - a_2 k^2 - \dots \quad (19)$$

mit

$$a_\mu = a^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \sigma_\mu}{n! (n+2l+1)!}.$$

Zur Berechnung der symmetrischen Grundfunktionen benützen wir die bekannten NEWTONSchen Formeln:

$$\begin{aligned} S_1 + \sigma_1 &= 0, \\ S_2 + \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 &= 0, \\ S_3 + \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 + 3\sigma_3 &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (20)$$

wo S_p die Potenzsummen der Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n bedeutet:

$$S_p = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p.$$

Sind die Wurzeln die Zahlen $1, 2, \dots, l$, so gilt¹³

$$S_p(l) = \frac{1}{p+1} \left\{ (l+1)^{p+1} + \binom{p+1}{1} B_1 (l+1)^p + \dots + \binom{p+1}{p} B_p (l+1) \right\},$$

wo B_i die BERNOULLISCHEN Zahlen sind:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \dots;$$

es ergibt sich

$$S_1(l) = \frac{1}{2} l(l+1), \quad S_2(l) = \frac{1}{6} l(l+1)(2l+1), \dots; \quad (21)$$

für unseren Fall lauten die Potenzsummen $S_p(l+1, \dots, l+n) = S_p(l+n) - S_p(l)$, also

$$S_1 = \frac{1}{2} n(n+2l+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n[2n^2 + 3n(2l+1) + 6l^2 + 6l + 1];$$

in Gl. (20) eingesetzt, erhält man:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} n(n+2l+1),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{24} n(n-1)[3n^2 + (12l+5)n + 2(6l^2 + 6l + 1)].$$

Aus Gl. (12 c) folgt ferner, wenn $z/2 = \sqrt{b}$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{1}{2}z\right)^{-2l-1} I_{2l+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!(n+2l+1)!}.$$

Nun können die Koeffizienten von Gl. (19) berechnet werden; es ergibt sich sofort

$$\alpha_0 = b^{-l-\frac{1}{2}} I_{2l+1} (2\sqrt{b});$$

ferner

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!(n+2l+1)!} \frac{n(n+2l+1)}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} a b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!(n+2l+1)!}, \end{aligned}$$

¹³ K. KNOPP, „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen“ (Sammlung Grundlehren der math. Wissensch., Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl. 1931).

daher

$$a_1 = -r b^{-l-\frac{1}{2}} I_{2l+1} (2\sqrt{b});$$

$$a_2 = \frac{1}{24} a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n! (n+2l+1)!} n(n-1) [3n^2 + (12l+5)n + 2(6l^2+6l+1)] = \frac{1}{24} a^2 b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n! (n+2l+3)!} [3(n+2)^2 + (12l+5)(n+2) + 2(6l^2+6l+1)].$$

Da $3(n+2)^2 + (12l+5)(n+2) + 2(6l^2+6l+1) = 3(n+2l+2)(n+2l+3) + 2(n+2l+3) + 2l$,

erhält man nach Gl. (12 c) sofort

$$a_2 = \frac{r^2}{2} b^{-l-\frac{1}{2}} I_{2l+1} + \frac{r^2}{3} b^{-l-1} I_{2l+2} + l \frac{r^2}{5} b^{-l-\frac{3}{2}} I_{2l+3}$$

und für

$$u_l = \{a_0 + a_1 i k - a_2 k^2 - \dots\} \left\{1 + i k r - \frac{1}{2} k^2 r^2 - \dots\right\}$$

die angegebene Entwicklung (12 a).

2. Entwicklung von $v_l = \Re e^{ikr} (X_1 + X_2 + X_3)$:

Sie verläuft genau so wie unter erstens; für X_1 erhält man

$$X_1 = \beta_0 + \beta_1 i k - \beta_2 k^2 - \dots \quad (22)$$

mit

$$\beta_\mu = 2a^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n T_n^{n+2l+1}}{n! (n+2l+1)!} \sigma_\mu,$$

wobei

$$T_n^{n+2l+1} = \ln \left| \frac{2r}{a} \right| + C - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{n+2l+1} \frac{1}{v}$$

bezeichnet wurde. Zur Berechnung der β verwendet man noch die Umwandlung

$$T_{n+2}^s = T_n^s - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

bzw. verwandelt T_n^{n+2l+3} in T_n^{n+2l+2} oder T_n^{n+2l+1} . Das Ergebnis ist eine längere Formel und braucht nicht weiter angegeben zu werden.

X_2 entwickelt man ähnlich:

$$X_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2ikr)^n}{n! (n+2l+1)!} \left(\sum_{s=1}^n \left(-\frac{1}{iak} + l+1 \right) \dots \left(-\frac{1}{iak} + l+s-1 \right) \left(-\frac{1}{iak} + l+s+1 \right) \dots \left(-\frac{1}{iak} + l+n \right) \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n i a k}{n! (n+2l+1)!} \sum_{s=1}^n (1 + \sigma_1 i a k + \dots);$$

die Wurzeln sind $l+1, \dots, l+s-1, l+s+1, \dots, l+n$, daher
 $\sigma_1 = -(1/2) n (n+2l+1) + l+s$; es wird $\sum_s 1 = n, \sum_s \sigma_1 =$
 $= -(1/2) n (n-1) (n+2l+1)$ und daher

$$X_2 = \delta_1 i k - \delta_2 k^2 - \dots \quad (23)$$

mit leicht zu erhaltendem δ .

Etwas länger wird die Entwicklung von X_3 :

Infolge $(-2l)_n = (-1)^n (2l)! / (2l-n)!$ erhält man

$$X_3 = \frac{Y}{Z} \quad (24)$$

mit

$$Y = \sum_{n=0}^{2l} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{i a k} - l \right)_n (2 i k r)^n (2l-n)! \quad (24 a)$$

$$Z = (2 i k r)^{2l+1} \left(\frac{1}{i a k} - l \right)_{2l+1} \quad (24 b)$$

Man erhält für Z :

$$Z = b^{2l+1} \{1 + \sigma_1 i a k - \sigma_2 a^2 k^2 - \dots\}$$

mit den Wurzeln $l, l-1, \dots, -l$; die entsprechenden Potenzsummen sind

$$S_p(l, \dots, -l) = S_p(l) + (-1)^p S_p(l) = \begin{cases} 2 S_p(l) & p \text{ gerade,} \\ 0 & p \text{ ungerade} \end{cases}$$

und dadurch wird

$$Z^{-1} = b^{-2l-1} \left\{ 1 - \frac{1}{6} l(l+1)(2l+1) a^2 k^2 + \dots \right\}.$$

Für Y erhält man

$$Y = \sum_{n=0}^{2l} \frac{1}{n!} (2l-n)! b^n (-1)^n (-i a k)^n \left(-\frac{1}{i a k} - l \right)_n$$

und weiters

$$(-i a k)^n \left(-\frac{1}{i a k} - l \right)_n = 1 + \sigma_1 i a k - \sigma_2 a^2 k^2 - \dots$$

mit den Wurzeln $-l, -l+1, \dots, -l+n-1$; die Potenzsummen werden

$$S_p(-l, \dots, -l+n-1) = \begin{cases} (-1)^p S_p(l) - (-1)^p S_p(l-n), & n \leq l, \\ (-1)^p S_p(l) + S_p(n-l-1), & n \geq l+1; \end{cases}$$

in beiden Fällen erhält man aber mittels Gl. (20):

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} n (n-2l-1),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{24} n [3 n^3 - 2 n^2 (6l+5) + 3 n (4l^2 + 8l + 3) - 12 l^2 - 12 l - 2]$$

und schließlich

$$Y = \gamma_0 + \gamma_1 i k - \gamma_2 k^2 - \dots$$

mit

$$\gamma_\mu = a^\mu \sum_{n=0}^{2l} \frac{1}{n!} (2l-n)! b^n (-1)^n \sigma_\mu;$$

die γ sind leicht zu berechnen. Durch Multiplikation von Y und Z^{-1} ergibt sich

$$X_3 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 i k - \varepsilon_2 k^2 - \dots \quad (25)$$

mit längeren Ausdrücken für die ε . Weiters ergibt sich

$$\frac{X}{(2l+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m (i k)^m \quad (26)$$

mit

$$B_\mu = \beta_\mu + \delta_\mu + \varepsilon_\mu;$$

nach Benützung von Gl. (12 c) und (12 d) erhält man:

$$B_0 = -2 b^{-l-\frac{1}{2}} K_{2l+1},$$

$$B_1 = 2 r b^{-l-\frac{1}{2}} K_{2l+1} + r b^{-l-\frac{3}{2}} (2l+1) I_{2l+1},$$

$$B_2 = -r^2 b^{-l-\frac{1}{2}} K_{2l+1} - \frac{2}{3} r^2 b^{-l-1} K_{2l+2} -$$

$$- \frac{2}{3} l r^2 b^{-l-\frac{3}{2}} K_{2l+3} - (2l+1) r^2 b^{-l-\frac{5}{2}} I_{2l+1} +$$

$$+ \frac{1}{3} (6l^2 + 6l + 1) r^2 b^{-l-\frac{5}{2}} I_{2l+1}.$$

Multipliziert man Gl. (26) noch mit der Reihe für $e^{i k r}$ und nimmt den Realteil, so ergibt sich für v_l die angegebene Entwicklung Gl. (12), (12 b).

Schließlich sei noch das Auftreten des Ausdrucks (16) bei den genannten Autoren erklärt: diese verwendeten nämlich die bei YOST, WHEELER und BREIT¹¹ angeführten Ausdrücke für χ_l und ω_l . Das Polynom Gl. (16) ist im wesentlichen nichts anderes als unsere Größe Z , Gl. (24 b); das ersieht man aus

$$Z = b^{2l+1} (i a k)^{2l+1} \left(\frac{1}{i a k} - l \right) \left(\frac{1}{i a k} - l + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{i a k} + l \right) =$$

$$= b^{2l+1} i (-1)^l (a k)^{2l+1} \left(\frac{1}{(i a k)^2} - \right.$$

$$\left. - l^2 \right) \left(\frac{1}{(i a k)^2} - (l-1)^2 \right) \dots \left(\frac{1}{(i a k)^2} - 1 \right) \frac{1}{i a k},$$

$$Z = b^{2l+1} \eta^{-2l} (l^2 + \eta^2) (l-1)^2 + \eta^2) \dots (1 + \eta^2)$$

mit $\eta = 1/ak$. Dieses Polynom ist in der Bezeichnungsweise von YOST, WHEELER und BREIT aus dem entsprechenden Ausdruck (10 c) herausgehoben und wurde von CHEW und GOLDBERGER sowie KUSHNERIUK und PRESTON bei der Reihenentwicklung von f_l auf die linke Seite gebracht. Die Entwicklung von Z^{-1} in eine Potenzreihe hat vielleicht den Nachteil, daß dadurch eine obere Grenze für den Konvergenzradius der Reihe für v_l bestimmt wird: sie ergibt sich aus der absolut kleinsten Nullstelle von Z ; diese ist $k = 1/ila$ und die Reihe divergiert daher, sobald $k > 1/la$.

Herrn Prof. Dr. Theodor SEXL verdanke ich das Zustandekommen dieser Arbeit nebst vielen wertvollen Ratschlägen. Ich erlaube mir daher an dieser Stelle, meinen ergebensten Dank dafür auszusprechen.

Über allgemeine Relativitätstheorie und einheitliche Feldtheorie.

Von

Ferdinand Cap.

Institut für theoretische Physik der Universität Innsbruck.

(Eingelangt am 26. März 1952.)

Unter der einheitlichen Feldtheorie* versteht man eine Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie, durch die außer der Gravitation auch das elektromagnetische Feld „vergeometrisiert“ wird¹. Ansätze, auch die Felder der Kernkräfte durch die Weltgeometrie auszudrücken, wurden ebenfalls gemacht, haben jedoch bisher zu keinem durchschlagenden Erfolg geführt². Eine solche, alle drei heute bekannten physikalischen Felder** durch eine verallgemeinerte Weltgeometrie beschreibende Theorie würde, ergänzt durch quantentheoretische Gesichtspunkte, das eine fundamentale Naturgesetz abgeben, das sämtliche physikalische Erscheinungen, vom Atom bis zum fernsten Spiralnebel und dem Bau des Kosmos, zu beschreiben in der Lage wäre. Dies ist das ferngesteckte Ziel der theoretischen Physik — bis heute gelang jedoch nur die Vereinigung der Felder des Elektromagnetismus und der Gravitation. Die einheitliche Feldtheorie muß daher in der Lage sein, die Wechselwirkung von Gravitation und Elektromagnetismus und all unser heutiges Wissen über diese beiden Felder wiederzugeben. Ob sie dies in der heute akzeptierten Form von EINSTEIN und SCHRÖDINGER auch wirklich tut, ist noch Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen. Möglicherweise muß eine neue Theorie gesucht werden — die bisher abgeleiteten Folgerungen scheinen aber mit unserer experimentellen Erfahrung im Einklang zu sein.

Da die einheitliche Feldtheorie auf der allgemeinen Relativitätstheorie beruht, die wieder ihrerseits eine Verallgemeinerung der speziellen Relativitätstheorie ist, sollen in diesem Bericht die Grundgedanken der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie vorerst kurz zusammengefaßt werden³.

* Unified Field Theory.

** i. e. MAXWELL-Feld und DIRACsches Elektronwellenfeld; Gravitationsfeld; Mesonenfelder.

1. Die Grundgedanken der speziellen Relativitätstheorie.

Ausgehend von gewissen, mit dem GALILEISCHEN Relativitätsprinzip der Mechanik nicht zu vereinbarenden elektrodynamischen Erfahrungen stellte EINSTEIN 1905 die Forderung auf, daß für das gesamte Naturgeschehen nur ein einziges Relativitätsprinzip gelten müsse und daß notfalls unsere Anschauungen über Raum und Zeit revidiert werden müßten, wenn sich die Elektrodynamik diesem Relativitätsprinzip nicht fügte. Das GALILEISCHE Relativitätsprinzip, das bekanntlich der Erfahrung bestens entspricht, fordert, daß alle mechanischen Vorgänge unabhängig von der Größe der konstanten Geschwindigkeit, mit der das betreffende System bewegt wird, ablaufen müssen. Mathematisch läßt sich das so ausdrücken, daß alle mechanischen Gesetze gegenüber einer GALILEI-Transformation

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} t \quad t = t' \quad (1)$$

(wo \mathbf{r} und \mathbf{r}' die Ortsvektoren im ruhenden, respektive bewegten Koordinatensystem, \mathbf{v} die Geschwindigkeit mit der sich das bewegte System relativ zum ruhenden bewegt und t , bzw. t' die Zeit) invariant sein müssen.

Wie bekannte Versuche von MICHELSON und anderen zeigten, fügt sich die Elektrodynamik unter Annahme der klassischen Raum-Zeit-Vorstellungen nicht dem Relativitätsprinzip. Eingehende Untersuchungen zeigten, daß es überhaupt nur die folgenden Möglichkeiten gab:

- a) klassische Raum-Zeit-Vorstellung und Relativitätsprinzip; dieses läßt sich dann durch die GALILEI-Transformation (1) ausdrücken;
- b) klassische Raum-Zeit-Vorstellung und klassische Elektrodynamik;
- c) einheitliches Relativitätsprinzip für die Gesamtphysik (also auch Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) und klassische Elektrodynamik.

Die Möglichkeiten a und b wurden durch eine Reihe bekannter Versuche ausgeschlossen:

a) führte zur ballistischen Theorie des Lichtes, die zufolge der Ergebnisse der Forschungen bei bedeckungsveränderlichen Doppelsternen und vieler anderer Erfahrungen nicht durchführbar war,

b) hätte bedeutet, daß das Relativitätsprinzip nicht galt — der Erfahrung nach waren aber sowohl mechanische als *auch* elektrodynamische Vorgänge (MICHELSON-Versuch und andere!) vom Bewegungszustand (das heißt vom Wert der konstanten Geschwindigkeit) des bewegten Systems in dem die betreffenden Versuche durchgeführt werden, unabhängig.

Die gebieterische Forderung der gleichzeitigen Aufrechterhaltung von klassischer Elektrodynamik (MAXWELL-Gleichungen) und des Relativitätsprinzips führte zur Möglichkeit c als der einzigen, die konsequent durchführbar war. Die spezielle Relativitätstheorie beruht also nicht *nur* auf dem MICHELSON-Versuch — eine Widerlegung der Deutung dieses Versuches würde die Relativitätstheorie noch lange nicht in sich zusammenbrechen lassen⁴, denn die Relativitätstheorie

wird nicht nur von einer *Reihe* berühmter Versuche (MICHELSON, WIEN, DOPPLER, WILSON, MICHELSON-GALE, RÖNTGEN-EICHENWALD, ROWLAND, TROUTON-NOBLE, KAUFMANN, FIZEAU, SAGNAC, Aberration, Verwandlung von Materie in Energie, Paarbildung etc.) getragen, sondern auch von der klassischen Elektrodynamik zusammen mit dem Relativitätsprinzip. Die durch c — also die spezielle Relativitätstheorie — erzwungenen neuen Raum-Zeit-Vorstellungen lassen sich nämlich durch Anwendung des Relativitätsprinzips auf die klassische Elektrodynamik sofort ableiten⁵. Man erhält so die LORENTZ-Transformation (2) als Ausdruck des Relativitätsprinzips unter Zugrundelegung der durch die Elektrodynamik und das Prinzip der konstanten Lichtgeschwindigkeit erzwungenen neuen Raum-Zeit-Vorstellungen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r' + v t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t' + \frac{v r'}{c^2} \\ t &= \frac{\quad}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

wo $\beta = \frac{|v|}{c}$ und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Aus der LORENTZ-Transformation folgen streng und zwingend weitreichende Folgerungen wie:

1. die Relativität der Gleichzeitigkeit — gestützt durch eine Analyse der physikalischen Möglichkeiten, Gleichzeitigkeit überhaupt festzustellen,

2. die Zeitdilatation — experimentell verifiziert inzwischen an rasch fliegenden zerfallenden Mesonen³⁶,

3. die LORENTZ-Kontraktion der Maßstäbe,

4. das relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten,

5. die durch KAUFMANN experimentell verifizierte Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit nach

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3)$$

6. die EINSTEINSche Formel der Äquivalenz von Masse und Energie, $E = m_0 c^2$, ebenfalls experimentell verifiziert durch den Massendefekt der Atomkerne etc.

7. und schließlich die Union von Raum $r(x, y, z)$, bzw. $r'(x', y', z')$ und Zeit (t) , bzw. (t') zur „Welt“, einem vierdimensionalen pseudo-euklidischen Kontinuum, dessen Abstände durch den vierdimensionalen pythagoräischen Lehrsatz gegeben sind

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + l'^2 \quad (4)$$

wo

$$l = ict \quad i = \sqrt{-1}$$

oder

$$ds^2 = \sum_{k=1}^4 dx_k^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (5)$$

Die Konzeption des vierdimensionalen Kontinuums (x, y, z, ict) spricht die absolute Gleichberechtigung von Raum und Zeit aus, aus welcher Forderung (herrührend von der LORENTZ-Transformation und damit dem Relativitätsprinzip) die relativistische Invarianz der Naturgesetze sofort abgelesen werden kann.

So sind z. B. die DIRAC-Gleichung des Elektrons (aus der man Gl. (9) gewinnen kann)

$$\sum_{k=1}^4 \gamma_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \mu \psi = 0 \quad \text{wo } \mu = \frac{2\pi m c}{h} \quad (6)$$

die MAXWELL-Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}} = \frac{1}{c} \mathfrak{j} & \text{div } \mathfrak{D} = \varrho \\ \text{II.} \quad & \text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}} = 0 & \text{div } \mathfrak{B} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

die D'ALEMBERTSche Wellengleichung

$$\square \psi \equiv \Delta \psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} = 0 \quad \text{bzw.} = Q \quad (8)$$

(wo Q eine Funktion ist, die über die Verteilung der das ψ -Feld erzeugenden Quellen eine Aussage macht); die SCHRÖDINGER-GORDON-Gleichung

$$\square \psi - \mu^2 \psi = 0 \quad \text{bzw.} = Q \quad (9)$$

relativistisch invariant, da räumliche und zeitliche Koordinaten „gleich berechtigt“ (das heißt gleiche Ordnung der Differentiation) vorkommen, während z. B. die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad (10)$$

relativistisch nicht invariant ist, da eine zeitliche Ableitung überhaupt nicht vorkommt.

Führt man im vierdimensionalen Kontinuum Weltvektoren, das heißt vierkomponentige Vektoren ein, so kann man die Gleichberechtigung von Raum und Zeit noch viel klarer hervortreten lassen. So kann man z. B. die MAXWELL-Gleichungen (7) umschreiben in die vierdimensionale Schreibweise Gl. (12), (13) und damit gleichzeitig ihre relativistische Invarianz beweisen. Üblicherweise⁶ erfolgt die Umschreibung so, daß man die φ_{i4} -Komponenten des Sechser-Vektors des elektromagnetischen Feldes φ_{ik} (Antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe) mit den Komponenten der elektrischen Feldstärke identifiziert

und die magnetische Feldstärke den Komponenten $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{31}$ zuordnet. EINSTEIN hat jedoch bereits vor mehr als 25 Jahren gezeigt⁷, daß diese Zuordnung inkorrekt ist und gerade durch das Gegenteil ersetzt werden muß, um vermittels der MAXWELL-Gleichung inverse Vorgänge — wie sonst in der Physik — durch eine Spiegelung der Zeitachse beschreiben zu können. Mit

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= \mathfrak{E}_z & \varphi_{14} &= -i \mathfrak{B}_x & \varphi_{11} &= \varphi_{22} = 0 \\ \varphi_{23} &= \mathfrak{E}_x & \varphi_{24} &= -i \mathfrak{B}_y & \\ \varphi_{31} &= \mathfrak{E}_y & \varphi_{34} &= -i \mathfrak{B}_z & \varphi_{33} &= \varphi_{44} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

nimmt (7 II) die Form

$$\sum_i \varphi_{kl,i} = 0 \quad k, l \text{ von } 1 \text{ bis } 4 \quad (12)$$

an, wobei wir unter $\varphi_{r,l} = \frac{\partial \varphi_{rl}}{\partial x_l}$ verstehen und $x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = ict$ ist.

Für das Folgende verwenden wir stets die Summationsregel der allgemeinen Relativitätstheorie, nämlich, daß über doppelt vorkommende Indizes in Produkten oder in Differentiationen summiert werden muß und erhalten so für Gl. (12) $\varphi_{kl,l} = 0$. Wählt man für die Erregung $\mathfrak{H}, \mathfrak{D}$ den antisymmetrischen Tensor f_{kl} und ordnet wieder den f_{k4} -Komponenten den magnetischen Vektor zu (dies muß man deshalb machen, damit die Materialgleichungen $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}, \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ aufgestellt werden können), so erhält (7 I) die Form

$$f_{kl,i} + f_{li,k} + f_{ik,l} = s_{ikl} \quad (13)$$

s_{ikl} ist dabei ein antisymmetrischer Tensor 3. Stufe, ein sogenannter Pseudovektor, der in der Relativitätstheorie an Stelle des Strom-Dichte-Vektors j, ρ tritt und gerade diejenigen Eigenschaften (Vorzeichenänderung bei Spiegelung) besitzt, die zur Invarianz der MAXWELL-Gleichungen gegenüber der Transformation $t \rightarrow -t$ erforderlich sind. (Bei der üblichen Zuordnung $\mathfrak{E} \rightarrow \varphi_{i4}, \mathfrak{D} \rightarrow f_{i4}$ etc. ist dies nicht erfüllt.) Für die Umschreibung des Stromdichtevektors gilt:

$$\rho = s_{123} \quad j_x = -ic s_{234} \quad j_y = +ic s_{134} \quad j_z = -ic s_{124} \quad (14)$$

Gl. (12) sagt aus, daß die Feldstärke eine Tensordichte ist und die Gleichung in der Form (15) $\varphi^{kl,l} = 0$ geschrieben werden sollte. (Über die Hochstellung der Indizes s. später; der Fettdruck von φ zeigt den Charakter als Dichte an.) Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie verschwindet jedoch der erst in der einheitlichen Feldtheorie wichtige Unterschied zwischen Tensor und Tensordichte.

Wir wissen heute, daß Akustik, Wärmelehre und Kinetik auf die Mechanik zurückführbar sind; die Optik und die Gesetze der Atomhülle sind auf die Elektrodynamik und die DIRACsche Theorie des Elektrons zurückführbar, so daß wir in der modernen Physik nur folgende Gebiete kennen:

- I. Mechanik (NEWTONSche Bewegungsgleichung und Energiesatz).
 II. Gravitation (NEWTONSches Gravitationsgesetz).
 III. Quantenelektrodynamik (MAXWELL-Gleichungen und DIRAC-Gleichung).
 IV. Kernkräfte (Feldgleichungen der Mesonen).

Die grundlegenden, das gesamte betreffende Teilgebiet beherrschenden Gesetze sind hiebei in Klammern danebengesetzt; MAXWELL-Gleichungen und DIRAC-Gleichung sind an sich relativistisch invariant — wir haben sie in dieser Form bereits hier angeschrieben; die Relativisierung der Gravitation ist erst in der allgemeinen Relativitätstheorie möglich und die richtigen Feldgleichungen der Mesonen sind noch unbekannt. Wir haben also nur mehr die Grundgleichung der Mechanik in speziell-relativistischer Form anzuschreiben. Es gilt*:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = 0 \quad i, k = 1 \dots 4. \quad (16)$$

T_{ik} ist hiebei ein symmetrischer Tensor im $R_4(x, y, z, t)$, der sogenannte Materietensor und Gl. (16) besagt, daß seine vektorielle Divergenz verschwindet. Wird der Impuls $m v$, bzw. ρv für die Volumseinheit mit \mathfrak{R} bezeichnet, so erhält man mit der Definition** der Kraftkomponente für $i, k = 1, 2, 3$

$$\mathfrak{R}_i = - T_{ik,k} \quad (17)$$

und der Definition der Impulskomponente

$$\mathfrak{R}_k = \frac{1}{i c} T_{4k} \quad (18)$$

aus Gl. (16) sofort für $i, k = 1, 2, 3$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{d(m v)}{dt} = \mathfrak{R} \quad (19)$$

Für die Indizes 4 ergibt sich wegen Gl. (18) mit (20) $T_{44} = -c^2 \rho$ wo ρ die Massendichte, die Kontinuitätsgleichung, da $\rho v \equiv j$. Die Vereinigung der physikalischen Theorien kann durch folgendes Schema übersichtlich dargelegt werden:

$I + II$ = allgemeine Relativitätstheorie (Vereinigung der mechanischen Grundgleichung (16) mit dem Gravitationsgesetz unter den Auspizien des allgemeinen Relativitätsprinzips — s. folgender Abschnitt).

$I + II +$ klassische Elektrodynamik = einheitliche Feldtheorie (Vereinigung der Gesetze (16), (12), (13) mit der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativitätstheorie, aber ohne quantentheoretische Gesichtspunkte).

$I + II + III + IV$ = das gesuchte „große Weltgesetz“.

* Summierung über i , da dieser Index doppelt vorkommt.

** Durch den Tensor T_{ik} lassen sich alle Kräfte außer Trägheitskräfte (wie Zentrifugalkraft, Corioliskraft) und der Schwerkraft erfassen.

2. Die Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie.

Wenn man das Relativitätsprinzip verallgemeinert auf beschleunigte Bewegungen, so kommt es zunächst zu einer Schwierigkeit. Das Trägheitsgesetz besagt ja, daß sich ein Körper längs einer geraden Linie fortpflanzt, so lange keine Kraft auf ihn wirkt. Unter gerader Linie („geodätischer Linie“) versteht man hiebei eine solche, die in der jeweils vorgegebenen Geometrie die kürzeste Verbindung zwischen zwei vorgegebenen Punkten ist*. In der euklidischen Geometrie des klassischen Raumes (x, y, z) und dem vierdimensionalen pseudo-euklidischen Kontinuum der speziellen Relativitätstheorie (x, y, z, t) sind dies Gerade.

Wenn man nun — auf Grund des oben ausgedrückten allgemeinen Relativitätsprinzips — wünscht, daß das Trägheitsgesetz in obiger Form auch in beschleunigten Systemen gilt, dann muß man die in solchen Systemen auftretenden Kräfte in die Geometrie des Raumes hineinstecken. Dies bedeutet also ein weiteres Abgehen von klassischen Raum-Zeitvorstellungen⁸; es bedeutet den Ersatz der durch Gl. (4), bzw. (5) ausgedrückten euklidischen** Geometrie durch die sogenannte RIEMANNsche Geometrie.

Nun gibt es aber außer Kräften, die von Spannungen der Materie oder von deren Trägheit, bzw. Impuls herrühren, noch Schwerkraften.

Für den freien Fall gilt z. B. in klassischer Ausdrucksweise

$$m_t b = - m_s g \quad (21)$$

Die skalare körperabhängige Konstante m_t , mit der man die Beschleunigung multiplizieren muß, um die Kräfte rechts vom Gleichheitszeichen zu erhalten, nennt man die träge Masse. Das Gewicht eines Körpers ist gemäß Erfahrung proportional der Schwerbeschleunigung, wobei die körperabhängige Proportionalitätskonstante m_s die schwere Masse heißt. Da wir nun nach der Erfahrung wissen, daß

1. alle Körper gleich schnell fallen,
2. es keinen Versuch gibt, um festzustellen, ob man in einem abgeschlossenen Raum einer Beschleunigung nach oben oder einer Schwerkraft nach unten unterliegt („Kastenphysiker“⁹) und da die Drehwaageversuche von Eötvös und Pendelversuche³ die Äquivalenz von träger und schwerer Masse bis zu höchster Meßgenauigkeit (10^{-8}) beweisen, können wir annehmen, daß immer $m_s = m_t$ gilt. Damit ist es aber möglich geworden, die Schwerkraft als gewöhnliche Trägheitskraft aufzufassen und sie zu geometrisieren. Dies erfolgt so, daß man das Vorhandensein von Kräften überhaupt leugnet und unter Zugrundelegung des allgemeinen Relativitätsprinzips die allgemeine Gültigkeit des Trägheitsgesetzes annimmt.

* Diese Definition gilt nur für differentielle Bereiche ganz streng. In großen Bereichen wäre sie etwa durch „kürzeste Verbindung ... bei vorgegebener Fortschrittsrichtung von dem einen Punkt weg“ zu ersetzen.

** Besser pseudo-euklidisch, da EUKLID nur drei Raumrichtungen und kein $t = ict$ kennt.

Es wird dann in jedem Fall die Geometrie so eingerichtet, daß deren geodätischen Linien (denen ja ein „kräftefreier“ Körper folgt) identisch sind mit den Bahnkurven.

Die Geometrie auf der Erdoberfläche z. B. wird man so wählen, daß deren geodätischen Linien die Fallparabeln sind. Die Geometrie in der Umgebung der Sonne wieder kann man so wählen, daß die Bahn des „kräftefreien“ Merkur die Merkurbahn mit Periheldrehung ist. Hat man einmal auf diesem Wege das jeweilige EINSTEINSche Gravitationsgesetz gefunden, so kann man ohne weiteres zur alten klassischen Auffassung eines — allerdings sehr komplizierten — Kraftfeldes im euklidischen Raum zurückkehren — es ist aber logisch viel sinnvoller und auch rein rechnerisch bequemer, am Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie zu bleiben und Materie und Kraft ganz in die Weltgeometrie zu stecken.

Da Schwerkraft und Trägheitskräfte nun wesensgleich geworden sind und beide in die Geometrie eingehen, kann man beide wegtransformieren*. Ein System in dem z. B. Zentrifugalkräfte auftreten, kann durch Wahl einer anderen Geometrie (also durch eine Transformation) völlig kraftfrei gemacht werden³. Durch die enge Verknüpfung von Raum und Materie verlieren beide Begriffe ihre selbständige Existenzmöglichkeit: Raum ist nichts anderes als die Gesamtheit der Abstände zwischen materiellen Objekten — ohne Materie gibt es keinen Raum, da ja erst diese den Raum und dessen Geometrie erregt. (Ebenso wie die elektrische Ladung erst das MAXWELL-Feld erregt.) Diese Erregung, besser Erzeugung, von Raum und Zeit durch den Materietensor beschreiben die EINSTEINSchen Feldgleichungen:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (22)$$

oder auch

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = -\kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik} \right) \quad (22 a)$$

wo

$$T = \sum_i T_i^i$$

Wendet man hierauf die Operation der vierdimensionalen Divergenz⁸ an, so erhält man für geodätische Koordinaten** sofort Gl. (16), das heißt die gesamte relativistische (und damit für $\beta \rightarrow 0$ auch die gesamte

* Auch dies gilt streng und allgemein nur für differentielle Bereiche oder einzelne Punkte; s. aber auch Arbeit 14, in welcher im ganzen Raumbereich ein Schwerfeld wegtransformiert wird.

** Also Koordinaten, die aus geodätischen Linien bestehen. Ein solches Koordinatensystem ist frei von Trägheitskräften; die ersten Differentialquotienten der g_{ik} verschwinden und damit auch die CHRISTOFFEL-Klammern. Solche Koordinatensysteme kann man immer nur an einem Punkt definieren.

klassische) Mechanik. Der in Gl. (22) links vom Gleichheitszeichen stehende Tensor $R_{ik} - 1/2 R g_{ik} + \lambda g_{ik}$ ist nämlich der allgemeinste, aus dem Tensor g_{ik} bildbare Tensor, dessen Divergenz in geodätischen Koordinaten verschwindet⁸. Um die Kräfte zu geometrisieren, muß man von Gl. (5) übergehen zum verallgemeinerten Linienelement der RIEMANNschen Geometrie⁸

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (23)$$

(Summierung über i und k ; i, k von 1 bis 4).

Um anzudeuten, daß die Koordinaten x^i dem Gesetz der kontravarianten Transformation folgen, stellen wir ihren Index i hoch — es handelt sich also nicht um Potenzen. Der kovariante Tensor g_{ik} mit zwei unteren Indizes (diese Stellung der Indizes zeigt an, daß sich der Tensor g_{ik} in beiden Indizes kovariant transformiert) heißt der metrische Fundamentaltensor; er ist symmetrisch, also $g_{ik} = g_{ki}$.

Der Tensor besitzt also 10 Komponenten.

Das Linienelement Gl. (23) bestimmt durch den metrischen Fundamentaltensor die Geometrie. Für Räume, in denen alle Achsen aufeinander senkrecht stehen, verschwinden diejenigen Komponenten g_{ik} , für die $i \neq k$ gilt.

Für den pseudoeuklidischen Raum der speziellen Relativitätstheorie gilt z. B. nach Gl. (5)

$$\begin{aligned} g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24} = g_{34} &= 0 \\ g_{11} = 1 \quad g_{22} = 1 \quad g_{33} = 1 \quad g_{44} &= -c^2 \end{aligned} \quad (5a)$$

Für die geodätischen Linien gilt allgemein die Differentialgleichung

$$\ddot{x}^l + \left\{ \begin{matrix} l \\ j \ k \end{matrix} \right\} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad j, k, l = 1 \dots 4 \quad (24)$$

Hiebei ist die geodätische Linie in Parameterdarstellung $x^i = x^i(p)$ gegeben* wo p die Eigenzeit und

$$\dot{x}^l = \frac{dx^l}{dp} \quad \ddot{x}^l = \frac{d^2x^l}{dp^2}$$

Vergleicht man Gl. (24) mit Gl. (19) so sieht man, daß die sogenannten CHRISTOFFELschen Klammern 2. Art $\left\{ \begin{matrix} l \\ j \ k \end{matrix} \right\}$ die Rolle von Kraftkomponenten übernehmen; die vom Ort und dem Bewegungszustand des Körpers abhängige „Masse“ kommt hier nicht mehr explizit vor. Laut Definition gilt

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ j \ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} (g_{ki,i} + g_{ij,k} - g_{jk,i}) \quad (25)$$

(wobei über i zu summieren ist nach unserer Regel und das Komma wieder die Differentiation bedeutet).

* Die Indizes in x^i etc. sind abermals keine Exponenten.

g^{il} ist der kontravariante Fundamentaltensor, definiert durch

$$g^{is} g_{sk} = \delta_{ik} \quad (26)$$

Die CHRISTOFFEL-Klammern 2. Art sind, wie Gl. (25) zeigt, in j und k symmetrisch. Es gibt also insgesamt 40 davon. Je zehn lassen sich zu einer Art Vektorkomponente zusammenfassen, so daß die 40 CHRISTOFFEL-Klammern gewissermaßen einen vierkomponentigen Kraftvektor vertreten („Weltvektor“ der Trägheits- und Schwerkraft). Der symmetrische Tensor g_{ik} spielt also die Rolle eines Potentials der Schwerkraft. Der kovariante Krümmungstensor R_{ik} in Gl. (22)

baut sich definitionsgemäß aus den $\left\{ \begin{smallmatrix} l \\ j \ k \end{smallmatrix} \right\}$ auf nach

$$R_{kl} = \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ m \end{smallmatrix} \right\}_{,l} - \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\}_{,m} + \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ n \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ l \ m \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \ n \end{smallmatrix} \right\} \quad (27)$$

(Summiere über m und n ! Alle Indizes von 1 bis 4.)

Dieser Tensor ist — wie Gl. (27) zeigt — ebenfalls symmetrisch. Die Größe R , die sogenannte invariante Krümmung ist gegeben durch

$$R = g^{kl} R_{kl} \quad (28)$$

Die Feldgleichung (22) beschreibt also, wie durch die Materie und ihre Spannungen der Raum und seine Krümmung erregt werden. Da sämtliche in den Feldgleichungen (22) vorkommenden Tensoren symmetrisch sind und die Indizes von 1 bis 4 gehen, stellen die Feldgleichungen zehn partielle und nach Gl. (28), (25) in den g_{ik} quadratische Differentialgleichungen 2. Ordnung für die zehn Unbekannten g_{ik} dar. Der Materietensor T_{ik} muß hierbei gegeben sein. Da nun daneben noch Gl. (16) gilt, was vier Differentialgleichungen entspricht, erhält man aus den Feldgleichungen (22) nur sechs unabhängige Aussagen und kann man daher stets vier von den zehn Funktionen $g_{ik}(x_i)$ willkürlich wählen — dies entspricht eben der in der allgemeinen Relativitätstheorie gegebenen Transformationsfreiheit, mit der man sogar Schwerfelder wegtransformieren kann¹⁴.

Die Konstante κ muß nun so bestimmt werden, daß das NEWTONSche Gravitationsgesetz in erster Näherung (das heißt aufgefaßt als schwache Störung der pseudoeuklidischen Metrik, als ihr überlagertes Feld) aus den Feldgleichungen gewonnen werden kann. Aus Gl. (22 a) erhält man so für $i = k = 4$ die EINSTEINSche Gravitationskonstante

$$\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4} = 2,071 \cdot 10^{-48} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2, \quad (29)$$

wo $\gamma = 6,681 \cdot 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ die NEWTONSche Gravitationskonstante ist.

Es ergibt sich so¹⁰ das Gravitationspotential

$$u = -\frac{\gamma M}{r} + \frac{\lambda c^2}{6} r^2 \quad (30)$$

Der Term mit λ stellt eine Abstoßungskraft dar; da eine solche innerhalb des Planetensystems nicht gefunden wurde, sich aber über große Entfernungen (in der Ausdehnung des Weltalls) sehr wohl manifestiert, muß λ eine sehr kleine Konstante sein. Sie erhält den Namen kosmologische Konstante und ist nach modernen Messungen¹¹ (Spiralnebelverteilung, Rotverschiebung, Weltalter)

$$\lambda = 10^{-35} \text{ sec}^{-2}, \quad \text{wenn} \quad \kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}, \quad (31)$$

bzw. bei obiger Bestimmung von κ nach Gl. (29)

$$\lambda = -\frac{10^{-35}}{c^2} \sim 10^{-56} \text{ cm}^{-2}. \quad (31 a)$$

Infolge des abstoßenden Terms in Gl. (30) nimmt die Gravitation auf große Entfernungen stärker als $1/r$ ab; die Reichweite der Schwerkraft ist somit endlich. Für Entfernungen $r \sim \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ überwiegt die Abstoßung bereits beträchtlich; nach Gl. (30) wird

$$u_{\min} = -\gamma M \sqrt{2\lambda} + \frac{c^2}{12} \quad (30')$$

Die Fluchtgeschwindigkeit der Spiralnebel nähert sich somit der Lichtgeschwindigkeit, die auch für die Expansionsgeschwindigkeit des Weltalls eine unüberschreitbare Grenze darstellt. Der Radius des Weltalls und damit die Reichweite der Gravitation wird somit von der Größenordnung

$$r_{\max} \equiv R_w \sim \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sim 10^{28} \text{ cm}, \quad (32)$$

was sowohl mit dem Radius des statischen (sich nicht ausdehnenden) Universums nach EINSTEIN¹², als auch mit neuen kosmologischen Messungen^{11, 13} und mit der heute wohl allgemein akzeptierten FRIEDMAN-LEMAITRESchen Expansionstheorie des Universums größenordnungsmäßig übereinstimmt.

Das exakte Potential des Einkörperproblems (ruhender Zentralkörper mit überwiegender Masse) erhält man aus den geodätischen Linien der SCHWARZSCHILDschen Maßbestimmung¹⁴. Es gilt:

$$u = -\frac{\gamma M}{r} - \frac{\gamma M}{c^2 - E} b^2 \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{\lambda}{6} (b^2 + [c^2 - E] r^2) \quad (30 a)$$

Hiebei ist $b = r^2 \dot{\varphi}$ die Konstante des Flächensatzes, der natürlich auch in der allgemeinen Relativitätstheorie gilt (da auch Gl. (30 a) das Potential einer Zentralkraft ist) und E ist die Energiekonstante (Summe aus potentieller und kinetischer Energie). Da $E \ll c^2$ folgt unter Vernachlässigung des $1/r^3$ Gliedes und von E gegen c^2 mit $\text{const.} = \lambda/6 b^2$ aus Gl. (30 a) sofort Gl. (30). Das Glied mit $1/r^3$ beschreibt eine nur auf sehr kurze Entfernungen wirksame Anziehungs-

kraft, die für die Periheldrehung des Merkur verantwortlich ist. Die kleinste, physikalisch vernünftige Entfernung vom Schwerpunkt des Zentralkörpers ist hiebei gegeben durch

$$r_{\min} \equiv \alpha = \frac{2\gamma M}{c^2 - E} \sim \frac{2\gamma M}{c^2} \quad (33)$$

Eine Kugel mit der Masse M muß daher mindestens einen Radius r_{\min} haben, was in der Natur auch stets zutrifft; für die Sonne gilt $\alpha = 2,88 \cdot 10^5$ cm, während der Sonnenradius $6,95 \cdot 10^{10}$ cm ist, für den Urankern gilt $\alpha = 5,8 \cdot 10^{-50}$ cm, während der wirkliche Kernradius von der Größe 10^{-12} cm ist. In der Entfernung Gl. (33) überwiegt

das „Merkurglied“ alle anderen, es gilt nach Gl. (30a) $u_{\max} = -\frac{c^4 b^2}{8\gamma^2 M}$,

wo $E \ll c^2$. Tatsächlich werden diese Potentialwerte nie erreicht, da bereits vorher der Zentralkörper beginnt. Für das Innere desselben gelten aber ganz andere Gesetzmäßigkeiten¹⁵.

Wie man durch Ableiten der Differentialgleichung für u nach Gl. (30 a) sieht, kann man stets durch Wahl einer bestimmten kontinuierlichen Massenverteilung ρ zur Poissonschen Differentialgleichung oder einer anderen homogenen Differentialgleichung und damit zur Vorstellung eines Gravitationsfeldes im pseudo-euklidischen Raum Gl. (5) an Stelle einer durch die Materie nach Gl. (22) erregten Metrik gelangen²⁵.

Für nicht statische und nicht zentrisch-symmetrische Gravitationsfelder erhält man nach Lösung von Gl. (22) komplizierte quadratische Gleichungen für die g_{ik} , deren klassische Bedeutung als Kraftpotentiale aus den Gleichungen für die geodätischen Linien („Bewegungsgleichungen“) (24) gewonnen werden muß. Auf diese Weise läßt sich die beim jeweiligen Problem gewonnene Metrik als Kraftfeld im pseudo-euklidischen Raum einführen. Beschränkt man sich auf schwache Gravitationsfelder — also auf nur kleine Abweichungen von der pseudo-euklidischen Metrik, dann erhält man Gleichungen vom Typ (8). bzw. (9), je nachdem, ob man $\lambda = 0$ oder $\lambda \neq 0$ voraussetzt.

Für $\lambda = 0$ macht man mit der Festsetzung $c = 1$ nach Gl. (5 a) den Ansatz

$$g_{ik} = \varepsilon_i \delta_{ik} + \gamma_{ik} \quad (34)$$

wo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_4 = -1$; das ε_i ist nicht der Summierungsregel unterworfen. Die γ_{ik} sind die kleinen Abweichungen von der Metrik Gl. (5 a), deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Geht man mit Gl. (34) ein in Gl. (22), so erhält man — unter Verwendung einer Transformation —

$$\square \gamma_{ik} = -2\kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T \varepsilon_i \delta_{ik} \right) \quad (35)$$

also eine Gleichung vom Typ (8). Diese Gleichung beschreibt die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitenden EINSTEINSchen Gravitationswellen; ihre Reichweite ist unendlich.

Für $\lambda \neq 0$ löst die pseudoeuklidische Metrik die Feldgleichungen nicht. Während nämlich für $\lambda = 0$ nur dann die pseudoeuklidische Metrik verbiegenden Gravitationskräfte auftreten und eine Raumkrümmung hervorrufen, wenn Materie vorhanden ist, ist im Fall $\lambda \neq 0$ auch dann noch eine Raumkrümmung da, wenn keine Materie vorhanden ist. Dies ersieht man schon aus Gl. (30 a), wenn man dort $M = 0$ setzt. Es bleibt stets die vom kosmologischen Glied herrührende Abstoßung übrig. Da wir heute starke kosmologische Gründe für $\lambda \neq 0$ haben¹³, müssen wir schließen, daß es eine pseudoeuklidische Metrik überhaupt nicht gibt. (Für Räume der relativen Kleinheit des Sonnensystems kann allerdings λ ohne weiteres 0 gesetzt werden.) Für $\lambda \neq 0$ werden die Feldgleichungen für $T_{ik} = 0$ durch den Ansatz von DE SITTER gelöst. Es gilt in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(1 + \frac{\lambda}{3} r^2\right)^{-1} & g_{22} &= r^2 & g_{33} &= r^2 \sin^2 \vartheta \\ g_{44} &= -c^2 \left(1 + \frac{\lambda}{3} r^2\right) & g_{ik} &= 0 & \text{für } i &\neq k \end{aligned} \quad (36)$$

so wie in Gl. (5 a) stehen also alle Achsen aufeinander senkrecht. Für $\lambda = 0$ erhält man die pseudoeuklidische Metrik in Polarkoordinaten. Mit $c = 1$ und $f_1 = g_{11}$, $f_2 = g_{22}$, $f_3 = g_{33}$, $f_4 = -1/g_{11}$ können wir unter Annahme eines schwachen Feldes wieder setzen

$$g_{ik} = \varepsilon_i f_i \delta_{ik} + \gamma_{ik} \quad (37)$$

und erhalten aus den Feldgleichungen

$$\square \gamma_{ik} - 2\lambda \gamma_{ik} = -2\kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T \varepsilon_i f_i \delta_{ik} \right) \quad (38)$$

also mit $\mu^2 = 2\lambda$ eine Gleichung vom Typ (9), deren GREENSche Funktion nicht wie bei Gl. (35) $1/r$ — sondern $1/r e^{-\sqrt{2\lambda}r}$ ist. Gravitationswellen haben also in der Metrik Gl. (36) die Reichweite $1/\sqrt{2\lambda}$, was nach Gl. (32) wieder von der Größenordnung des Weltradius ist.

Die Gln. (35), respektive (38) sind linear; sie können daher quantisiert werden und bilden den Ausgangspunkt der Quantentheorie der Gravitation¹⁶. Auf diese Weise ist es möglich, auch die Wechselwirkungen von Spin und Gravitation zu erfassen¹⁷. Das Elementarteilchen, das durch den symmetrischen Tensor γ_{ik} dargestellt wird, erhielt den Namen Graviton und besitzt den Spin 2. Es kann also zwischen zwei Elementarteilchen beliebigen Spins nicht nur Impuls austauschen (führt zu einem NEWTON-Potential mit beschränkter Reichweite) sondern auch Spin.

3. Die Grundgedanken der einheitlichen Feldtheorie.

Wir besprechen die Theorie hier in der Form von SCHRÖDINGER¹, da der „rein affine Standpunkt“ scheinbar noch die Möglichkeit eines Unterbringens der Mesonfelder offen läßt und weil sich seine Bezeichnungsweise mehr der allgemeinen Relativitätstheorie anschließt, als die komplexe Schreibweise von EINSTEIN und STRAUS.

Der symmetrische Fundamentaltensor, den wir nun mit g_{ik} bezeichnen wollen, umfaßt zehn Komponenten; er unterscheidet sich gerade durch einen Sechser-Vektor (antisymmetrischer Tensor), den wir mit g_{ik} bezeichnen, von einem vollen Tensor g_{ik} . Es gilt also in der einheitlichen Feldtheorie

$$g_{ik} = g_{ik} + g_{ik} \quad (39)$$

$$g_{ik} = \frac{1}{2} (g_{ik} + g_{ki}) \quad (40)$$

$$g_{ik} = -g_{ki} = \frac{1}{2} (g_{ik} - g_{ki}) \quad (41)$$

Nun ist es möglich, die Affinität¹⁸ Γ_{kl}^i einzuführen durch

$$g_{ik,l} - g_{mk} \Gamma_{il}^m - g_{im} \Gamma_{lk}^m = 0 \quad (42)$$

Bisher ist es nicht gelungen, daraus eine zu Gl. (25) analoge Formel für die explizite Berechnung der Affinität abzuleiten*. Da i, k, l von 1 bis 4 laufen, gibt es 64 Affinitäten — diese besitzen ja keinerlei Symmetrie in den Indizes. Der Name Affinität kommt daher, daß diese Größen beim Problem der invarianten Differentiation und der Parallelverschiebung eines Vektors erstmalig auftraten; sie schaffen einen affinen Zusammenhang zwischen den Punkten des Kontinuums¹⁹. Die allgemeine Relativitätstheorie arbeitet mit der RIEMANNschen Geometrie. In dieser ist das Ergebnis der Parallelverschiebung eines Vektors vom Wege abhängig, längs dessen die Verschiebung zwischen zwei Punkten erfolgt; die Länge des Vektors bleibt hierbei erhalten, nur seine Richtung wird geändert. In RIEMANNschen Räumen gibt es also zu einem Punkt P nicht in jedem Punkt Q unbedingt einen parallelen Vektor. Die Differentialgeometrie der einheitlichen Feldtheorie ist nichtriemannsch¹⁸; das heißt daß bei einer Parallelverschiebung eines Vektors dieser auch eine Längenänderung erfährt. Die Abweichungen von der RIEMANNschen Geometrie werden durch das MAXWELL-Feld bestimmt; verschwindet dieses, so muß sich aus der einheitlichen Feldtheorie eindeutig die allgemeine Relativitätstheorie mit ihrer RIEMANNschen Geometrie ergeben.

Man wird daher erwarten, daß der Sechser-Vektor „ g_{ik} “ oder „ g_{ik} “, etwas mit dem MAXWELL-Feld zu tun hat“.

* MME. TONNELAT teilt mir brieflich mit, daß ihr kürzlich eine Auflösung von (42) gelungen sei, s. Arbeit 35.

SCHRÖDINGER konnte tatsächlich zeigen²⁰, daß die Tensordichte*

$$g_{\check{\nu}}^{ik} = \sqrt{-g} g_{\check{\nu}}^{ik} \quad (43)$$

wo

$$g = \text{Det. } g_{ik}$$

das elektromagnetische Feld ist und die für die Tensordichte gültige Gleichung

$$g_{\check{\nu},k}^{ik} = 0 \quad (15)$$

mit der II. MAXWELL-Gleichung (12), bzw. (7 II) identisch ist. Die Identifizierung von $g_{\check{\nu}}^{ik}$ mit dem MAXWELL-Feld ist merkwürdig, da die Größen g_{ik} (oder vielleicht, was noch nicht feststeht $g_{\check{\nu}}^{ik}$ oder gar g_{ik} oder $g_{\check{\nu}}^{ik}$ — welche Größen für symmetrisches g_{ik} alle identisch werden — die Rolle des Gravitationspotentials spielen). Die physikalische Interpretation der Theorie ist also heute noch nicht völlig klar.

Die Affinität läßt sich zerlegen¹⁹ in

$$\Gamma_{\check{\nu}}^k = \Gamma_{\check{\nu}}^k + \Gamma_{\check{\nu}}^k \quad (44)$$

Der symmetrische Teil hat 40 Komponenten und wird für symmetrische g_{ik} identisch mit den CHRISTOFFEL-Klammern 2. Art $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \ l \end{smallmatrix} \right\}$; der unsymmetrische Teil hat 24 Komponenten und ist ein antisymmetrischer Tensor 3. Stufe.

Es gilt

$$\Gamma_{\check{\nu}}^k = \frac{1}{2} (\Gamma_{\check{\nu}}^k - \Gamma_{\check{\nu}}^k) \quad (45)$$

$$\Gamma_{\check{\nu}}^k = \frac{1}{2} (\Gamma_{\check{\nu}}^k + \Gamma_{\check{\nu}}^k) \quad (46)$$

Setzt man Gl. (44) in Gl. (42) ein, so erhält man nach Trennung in symmetrischen und antisymmetrischen Teil

$$g_{\check{\nu},l}^{ik} = g_{\check{\nu}}^{ik} \Gamma_{\check{\nu}}^l + g_{\check{\nu}}^{il} \Gamma_{\check{\nu}}^k + g_{\check{\nu}}^{sk} \Gamma_{\check{\nu}}^l + g_{\check{\nu}}^{is} \Gamma_{\check{\nu}}^k \quad (47 a)$$

$$g_{\check{\nu},l}^{ik} = g_{\check{\nu}}^{ik} \Gamma_{\check{\nu}}^l + g_{\check{\nu}}^{il} \Gamma_{\check{\nu}}^k + g_{\check{\nu}}^{sk} \Gamma_{\check{\nu}}^l + g_{\check{\nu}}^{is} \Gamma_{\check{\nu}}^k \quad (47 b)$$

Führt man nun²¹ durch

$$h_{\check{\nu}}^{ik} g_{\check{\nu}}^{il} = \delta_{kl} \quad (48)$$

einen symmetrischen Tensor $h_{\check{\nu}}^{ik}$, der mit $g_{\check{\nu}}^{ik}$ nicht identisch ist, ein, so kann man die Gln. (47) auflösen und erhält Formel (49), die an Stelle von (25) tritt. Es gilt

$$\Gamma_{\check{\nu}}^i = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\} - h_{\check{\nu}}^{im} (g_{\check{\nu}}^{ls} \Gamma_{\check{\nu}}^s + g_{\check{\nu}}^{ks} \Gamma_{\check{\nu}}^s) \quad (49 a)$$

$$\Gamma_{\check{\nu}}^i = \left\langle \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\rangle + h_{\check{\nu}}^{im} (g_{\check{\nu}}^{ls} \Gamma_{\check{\nu}}^s - g_{\check{\nu}}^{ks} \Gamma_{\check{\nu}}^s) \quad (49 b)$$

* In der einheitlichen Feldtheorie werden Tensordichten mit deutschen Buchstaben bezeichnet. Der Unterschied zwischen einem Tensor und einer Tensordichte besteht im Transformationsgesetz¹⁹; er verschwindet im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, da in der Maßbestimmung (5 a) $g = -1$ ist, wenn $c = 1$.

wo $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\}$ durch Gl. (25) gegeben ist (es ist nur g^{ik} durch h^{ik} zu ersetzen) und $\left\langle \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\rangle$ durch Gl. (25 a).

Es ist

$$\left\langle \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} h_{\underline{m}}^{im} (g_{\underline{k}m, \underline{l}} + g_{\underline{m}l, \underline{k}} + g_{\underline{k}l, \underline{m}}) \quad (25 a)$$

Die von SCHRÖDINGER²¹ stammenden Formeln (49) sind nach Meinung des Verfassers so zu interpretieren:

Der zweite Term rechts vom Gleichheitszeichen in Gl. (49 a) enthält nur vom MAXWELL-Feld herrührende Glieder; er wäre daher als die gravitierende Wirkung des MAXWELL-Feldes anzusehen. $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\}$ ist die Schwerwirkung der Metrik allein im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie und $\Gamma_{\underline{k}l}^i$ beschreibt die gesamte Gravitation.

In Gl. (49 b) enthält der zweite Term rechts vom Gleichheitszeichen die $\Gamma_{\underline{k}m}^s$; er beschreibt daher den Einfluß der Gravitation auf das MAXWELL-Feld, dessen Verhalten durch $\Gamma_{\underline{k}l}^i$ beschrieben wird — nach Gl. (25 a) und (49 b) verschwindet ja der antisymmetrische Teil der Affinität, wenn kein MAXWELL-Feld vorhanden ist. Die Spitzklammer $\left\langle \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\rangle$ hingegen beschreibt das reine MAXWELL-Feld. Wir können nun die folgenden Spezialfälle unterscheiden:

A. $g_{ik} = 0$, das heißt kein MAXWELL-Feld. Es gilt dann $g^{ik} = g_{\underline{ik}} = h_{\underline{ik}}$ und aus Gl. (49 b) folgt $\Gamma_{\underline{k}l}^i = 0$ und aus Gl. (44) folgt $\Gamma_{\underline{m}l}^k = \Gamma_{\underline{m}l}^k$ und damit aus Gl. (49 a)

$$\Gamma_{\underline{m}l}^k = \Gamma_{\underline{m}l}^k = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \ l \end{smallmatrix} \right\}$$

Wir kommen somit zur allgemeinen Relativitätstheorie zurück. Die Schwerkkräfte werden durch einen mechanischen Energie-Spannungstensor T_{ik} erzeugt.

B. $g_{ik} = 0$ ist sinnlos, da es uns jeder Metrik beraubt; nach Gl. (23) würde $ds^2 = 0$ folgen.

C. $g_{ik} = \varepsilon_i \delta_{ik}$ bedeutet nach Gl. (5 a) die pseudoeuklidische Metrik. Diese dürfen wir nur für $\lambda = 0$ verwenden. Es gilt $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ k \ l \end{smallmatrix} \right\} = 0$ und von Gl. (49 a) bleibt nur die gravitierende Wirkung des MAXWELL-Feldes übrig. Da wir aber eine pseudoeuklidische Metrik, also einen gravitationsfreien Raum voraussetzen, müssen wir die $\Gamma_{\underline{k}l}^i$ als von höherer Ordnung klein Null setzen. Wir bekommen also nur eine

Näherungslösung, während unter A eine strenge Lösung möglich war. Dies hängt mit dem Bau der Formel (49) zusammen. Mit der Annahme

$\Gamma_{kl}^i = 0$ erhält man aus Gl. (49 b) $\Gamma_{kl}^i = \left\langle \begin{smallmatrix} i \\ kl \end{smallmatrix} \right\rangle$, was in die gleich zu

besprechenden Feldgleichungen (50) eingesetzt, die Elektrodynamik der einheitlichen Feldtheorie ergibt. Diese Elektrodynamik ist quadratisch; sie weicht also für große Feldstärken von der MAXWELLSchen Elektrodynamik ab und dürfte mit der sogenannten BORNschen Elektrodynamik²² identisch sein²³. Die Unterschiede zwischen der Elektrodynamik der einheitlichen Feldtheorie und der MAXWELLSchen Elektrodynamik dürften allerdings erst bei jenen Feldstärken merkbar werden, bei denen man die gravitierende Wirkung des MAXWELLFeldes längst nicht mehr vernachlässigen darf.

D. $g_{ik} = \varepsilon_i f_i \delta_{ik}$ bedeutet nach Gl. (36) die für $\lambda \neq 0$ geltende DE SITTER-Lösung. Hier ist nun $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ kl \end{smallmatrix} \right\}$ nicht mehr gleich Null. In Analogie

zu den an Gl. (37) anschließenden Rechnungen wird man aber zu erwarten haben²³, daß man im wesentlichen dieselbe Elektrodynamik wie unter C, jedoch mit *nicht* verschwindender Photonenmasse erhält.

Während es nach A so aussieht, als ob es ein Gravitationsfeld im Vakuum gibt, gibt es nach C sicher kein nicht gravitierendes MAXWELLFeld. Hier greifen nun die Feldgleichungen der einheitlichen Theorie ein.

Es gilt statt Gl. (22 a)

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = 0 \quad (50)$$

wo an Stelle von Gl. (27)

$$R_{ik} = \Gamma_{is,k}^s - \Gamma_{ik,s}^s + \Gamma_{it}^s \Gamma_{sk}^t - \Gamma_{ts}^s \Gamma_{ik}^t \quad (51)$$

tritt. R_{ik} ist ein unsymmetrischer Tensor.

Nach Fall A ist $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ kl \end{smallmatrix} \right\}$, so daß dafür aus Gl. (51) sofort Gl. (27) folgt und damit

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = 0 \quad (22 b)$$

als Feldgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie.

Vergleichen wir mit Gl. (22 a), so sehen wir, daß die einheitliche Feldtheorie eine unitäre Theorie ist, das heißt die Quellen des Feldes (Materie, bzw. elektrische Ladung) stecken in den Feldgleichungen drinnen, es gilt immer $T_{ik} = 0$. Insofern ist also Gl. (50) spezieller als Gl. (22 a), da Gl. (50) nur den elektromagnetischen Spannungstensor unitär beinhaltet, während das T_{ik} in Gl. (22 a) auch den mechanischen Spannungstensor erfaßt. (Formeln (17), (18), (20), die noch durch elektromagnetische Spannungsglieder und den Strahlungsimpuls zu ergänzen wären.) Dann ist aber klar, daß auch Fall A physikalisch sinnlos ist — wenn es keine elektromagnetische Materie gibt (eine andere Materie, wie etwa Kernfeldmaterie — steckt ja in der einheitlichen Feldtheorie noch nicht drinnen), dann gibt es kein elektro-

magnetisches Feld — gibt es aber kein MAXWELL-Feld, dann gibt es nichts, was eine Metrik erregen könnte. Von dieser Feststellung sind nur die drei trivialen Lösungen $g_{ik} = 0$, $\varepsilon_i \delta_{ik}$, $\varepsilon_i f_i \delta_{ik}$ ausgenommen, die die einzigen bis heute bekannten Lösungen von Gl. (22 b) sind*. Die Gl. (22 a) enthält also wesentlich mehr physikalischen Inhalt als Gl. (22 b). Eine Ergänzung der Gl. (50) auf die Form der Gl. (22 a), um auch Kernmaterie zu erfassen, wurde meines Wissens noch nicht vorgenommen, dürfte aber möglich sein. Eine solche inhomogene Gl. (50) würde dann alle physikalisch möglichen Energietensoren T_{ik} erfassen, da sich ja der mechanische Tensor durch den elektromagnetischen Spannungstensor und den „Kerntensor“ ausdrücken lassen muß. Da wir außer mechanischen, elektromagnetischen und mesonischen Eigenschaften der Materie und der bereits erfaßten gravitativen Eigenschaften keine anderen Eigenschaften kennen, würde eine solche Gleichung, ergänzt durch eine Quantisierungsvorschrift, bereits das große Weltgesetz abgeben. Andererseits kann es aber möglich sein, daß dieses homogen ist, wenn die Mesonenfelder (und damit der Kerntensor) sich ebenfalls irgendwie in die Geometrie stecken ließen. Ein schweres Bedenken bleibt aber auf jeden Fall: Ob nämlich das durch Gl. (6) beschriebene Verhalten des Elektrons (also samt seinem Spin!) ausschließlich auf Tensorfelder, die den Gln. (50) genügen, zurückgeführt werden kann? In Gl. (6) stellt das ψ ja zwei Spinorenfelder von dem Rang 1 dar.

Man kann übrigens Gl. (50) durch Hinüberschaffen aller „Schiefteile“ auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens auf die Form (22 a), bzw. eine inhomogene Form von Gl. (22 b) bringen²⁴ und dann daraus den im Sinne der einheitlichen Feldtheorie richtigen elektromagnetischen Spannungstensor ablesen. Daß dieser Tensor nicht mit dem Spannungstensor der linearen MAXWELL-Theorie übereinstimmt ist klar; ob er mit dem der BORNSchen Theorie übereinstimmt, ist meines Wissens noch unbekannt²³. Ebenso ist noch unklar, ob man dieselben Ergebnisse erhält, wenn man einen quadratischen — etwa den BORNSchen — elektromagnetischen Spannungstensor als T_{ik} in Gl. (22 a) einsetzt** oder wenn man von Gl. (50) ausgeht. Dies hängt davon ab, ob die Elektrodynamik der einheitlichen Feldtheorie eben die BORNSche Elektrodynamik ist oder nicht²³.

Obwohl wir also wissen, daß es im Rahmen der einheitlichen Feldtheorie sinnlos ist, eines der beiden Felder g_{ik} oder \tilde{g}_{ik} für sich allein zu betrachten, da es weder ein MAXWELL-Feld ohne gravitierende Wirkung gibt, noch da ein Gravitationsfeld ohne erregendes MAXWELL-Feld (bzw. andere Materie, die wir allerdings bisher nur in der allgemeinen Relativitätstheorie durch den T_{ik} -Tensor erfassen können)

* SERINI konnte zeigen, daß es *nur* diese Lösungen geben kann³⁷. Bezüglich der SCHWARZSCHILD-Lösung s.¹⁴.

** Analoge Arbeiten mit elektromagnetischen Spannungstensoren linearer Theorien stammen von WEYL (Bericht hierüber z. B. in 3), von HÖNL²⁸ u. a.

existiert, betrachten wir nochmals Fall B. Vernachlässigt man die Gravitationswirkung des MAXWELL-Feldes, setzt man also für g_{ik} die pseudoeuklidische Lösung oder die DE SITTER-Lösung ein, so erhält man nicht die MAXWELLSche Elektrodynamik. Die Gleichungen, die sich für g_{ik} ergeben, sind ja quadratisch. Während also die II. MAXWELL-Gleichung (7 II), bzw. (12), respektive (15) immer streng gilt, gilt die I. MAXWELL-Gleichung nicht mehr. Für schwache Felder kann man, wie SCHRÖDINGER gezeigt hat²¹, zwar die erste MAXWELL-Gleichung in Näherung, bzw. durch geeignete Definition von j und ρ erhalten — für starke Felder gilt aber sicher eine quadratische Gleichung, wodurch das elektrodynamische Superpositionsprinzip und damit die Quantisierbarkeit starker MAXWELL-Felder (wie sie wohl in der Nähe elektrisch geladener Elementarteilchen herrschen) durchbrochen ist. Andererseits erhält man für die Stelle $r = 0$ (Ort der Ladung) nicht mehr ∞ große Feldstärken, wie in der linearen Elektrodynamik, sondern endliche Werte. Die sich aus der einheitlichen Feldtheorie ergebende Elektrodynamik dürfte²³ nämlich mit der BORNSchen Elektrodynamik²² identisch sein. Diese geht für Entfernungen größer als $3 \cdot 10^{-13}$ cm von der Ladung in die gewöhnliche MAXWELLSche Elektrodynamik über. Die BORNSche Elektrodynamik ist eine unitäre Theorie — sie enthält die Quellen des Feldes (die elektrische Ladungen) als Singularitäten des Feldes — da die Theorie quadratisch ist, können die Feldgleichungen gleichzeitig die Bewegungsgleichungen der Quellen enthalten, was bei linearen Theorien nicht möglich ist²⁵.

Die BORNSche Theorie gibt also eine *rein* elektromagnetische Theorie des Elektrons — ob eine solche — ganz abgesehen vom Spin^{26, 29} — überhaupt möglich ist, wird heute stark bezweifelt²⁷ — diese Schwierigkeiten wirken natürlich auf die einheitliche Feldtheorie zurück.

Einheitlich anerkannte strenge Lösungen der einheitlichen Feldtheorie gibt es bis heute noch nicht²⁹. STRAUS soll (einer freundlichen mündlichen Mitteilung von E. SCHRÖDINGER an den Verfasser zufolge) sogar bewiesen haben, daß es eine zentralsymmetrische statische („SCHWARZSCHILDartige“) Lösung nicht gibt³⁸.

Für schwache MAXWELL-Felder (deren gravitative Wirkungen und deren Abweichungen von der Elektrodynamik der einheitlichen Feldtheorie vernachlässigbar sind) erhält man²¹ nach Fall C aus Gl. (50) für $\lambda = 0$ in Näherung erster Ordnung die D'ALEMBERTSche Wellengleichung der Elektrodynamik (8) wo $\psi = \varphi_{ik}$ nach Gl. (11) und nach Fall D für $\lambda \neq 0$ erhält man²³ die SCHRÖDINGER-GORDON-Gleichung (9) des Photons mit nicht verschwindender Ruhemasse, die ebenso wie Gl. (8) als lineare Gleichung quantisierbar ist und zur Quantenelektrodynamik führt. Da die Quantentheorie der Elementarteilchen³⁰ die Konstante $\mu^2 = 2\lambda$ nach [s. auch bei Formel (6)!]

$$m = \frac{h\mu}{2\pi c} = \frac{h\sqrt{2\lambda}}{2\pi c} = \hbar \frac{\sqrt{2\lambda}}{c}, \quad (52 a)$$

$$\text{Reichweite} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \quad (52 \text{ b})$$

in Beziehung setzt zur Masse m des betreffenden Elementarteilchens und der Reichweite des betreffenden Feldes, folgt²⁶:

a) die Reichweite des MAXWELL-Feldes ist ebenso wie die der Gravitationswellen nach Gl. (38) und die des Gravitationspotentials u nach Gl. (30'), respektive (32) durch $1/\sqrt{2\lambda}$ gegeben und somit ebenfalls von der Größenordnung des Weltradius Gl. (32),

b) das Photon hat nach Gl. (31 a) eine Masse* von

$$m \sim 10^{-65} \text{ g.} \quad (52 \text{ a})$$

c) diese Masse ist nach Gl. (38) identisch mit der Ruhmasse des Gravitons.

Der Massenwert Gl. (52 a) ist nach DE BROGLIE³¹ mit all unserer experimentellen Erfahrung im Einklang. Allerdings stört die von Null verschiedene Photonenmasse die sogenannte Eichinvarianz der Elektrodynamik und der Theorie der schwachen Gravitationswellen, so daß einige Physiker geneigt sind, $\lambda = 0$ zu setzen³². Die kosmologischen^{11 33} Gründe für $\lambda \neq 0$ sind aber so stark, daß man demgegenüber ruhig die mehr formale Eichinvarianz opfern kann.

Für gleichzeitig vorhandene schwache elektromagnetische Felder und Schwerefelder ergeben sich in Näherung zweiter Ordnung lineare Theorien der Wechselwirkung**, aufbauend auf der aus der Feld-

* Der Unterschied in der Massenformel (52 a) und der in Arbeit ²⁶ angegebenen Formel (1) $m = (\hbar \sqrt{\lambda})/c$ rührt davon her, welches Weltmodell man betrachtet. Wohl gilt nach Gl. (9), (38), (53) immer $\mu^2 = 2\lambda$ und ist die Reichweite eines Feldes immer durch $1/\mu$ gegeben, doch besteht je nach dem betrachteten Weltmodell noch ein Zusammenhang zwischen Weltradius R_w und kosmologischer Konstante von der Form $R_w = \beta/\sqrt{\lambda}$. β ist hiebei eine aus der Kosmologie folgende Konstante; z. B. gilt für das EINSTEINSche Universum $\beta = 1$, für das DE SITTERsche $\beta = \sqrt{3}$. Für nichtstatische, also expandierende Weltmodelle gilt der Zusammenhang nur für bestimmte Zeiten; der Wert von β wird also z. B. durch das heutige Weltalter festgelegt, für welches β von ähnlicher Größenordnung wird. Man kann nun *entweder* — wie in ²⁶ geschehen — näherungsweise $\mu^2 = \lambda$ setzen (statt μ steht in Arbeit ²⁶ die Größe κ ; das dort verwendete μ bezieht sich auf das Elektron, nicht auf das Photon) und die Reichweite des Feldes genau gleich dem Wert des Weltradius setzen; das bedeutet dann die Spezialisierung auf ein EINSTEINSches Universum — oder aber man setzt — wie in vorliegender Arbeit — genau $\mu^2 = 2\lambda$ (diese Beziehung folgt aus Gl. (9) und (50) daraus, daß näherungsweise $R_{ik} = 1/2 \square \gamma_{ik}$, $R_{ik} = 1/2 \square \varphi_{ik}$ gilt), erhält dann als Reichweite Gl. (32) und (52 b) und bekommt zwischen Reichweite und Weltradius nur eine genäherte Gleichheit von der Größenordnung der Konstanten β (~ 1). Dieser Vorgang scheint mir zweckmäßiger, da $\mu^2 = 2\lambda$ einmal genau gilt und man ja nur eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung zwischen Feldreichweite und Weltradius benötigt; auch ist man dann noch in der Wahl des Weltmodelles frei.

** Für $\lambda = 0$ von SCHRÖDINGER in ²¹ behandelt, für $\lambda \neq 0$ vom Verfasser behandelt. (Publikation in Vorbereitung.)

gleichung (50) erhältlichen SCHRÖDINGER-GORDON-Gleichung (9), in der Form:

$$(\square - 2\lambda)\gamma_{ik} = \Phi_{ik} \quad (53)$$

wo Φ_{ik} ein aus den der MAXWELL-Elektrodynamik gehorchenden Feldstärken Gl. (11) aufgebauter Tensor ist. Die Gl. (53) ist linear und kann daher quantisiert werden und somit einen Ausgangspunkt geben für eine quantentheoretische Untersuchung der Wechselwirkung von Elektromagnetismus und Gravitation unter Verwendung der üblichen Wechselwirkungstheorie der Elementarteilchen²⁴. Hierüber soll — stets im Vergleich mit den stufenweisen Näherungen der unquantisierten Theorie — auf Grund eigener Arbeiten später ausführlicher berichtet werden.

Für starke Felder ist die Wechselwirkung so essentiell, daß man stets beide Felder zusammen behandeln muß und es sogar fraglich erscheint, ob eine Interpretation der diversen Tensorgrößen als „MAXWELL-Feld“ oder „Gravitationsfeld“ überhaupt möglich ist²¹.

Literatur.

Herrn Prof. A. EINSTEIN, Princeton und Herrn Prof. E. SCHRÖDINGER, Dublin, danke ich bestens für die Beschaffung hier praktisch nicht erhältlicher wissenschaftlicher Literatur.

1. A. EINSTEIN, *Journal of Mathematics*, **46**, 578 (1945). — E. SCHRÖDINGER, *Proc. R. Irish Acad.* **51** A, 163 (1947). — EINSTEIN, STRAUS, *Journal of Mathematics*, **47**, 731 (1946).

2. E. SCHRÖDINGER, *Proc. R. Irish Acad.* **49** A 16 (1944); **49** A 43 (1943), *ibid.* **51**, 41 (1946).

3. A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press. — M. LAUE, *Die Relativitätstheorie*, I. Band Spezielle Relativitätstheorie, II. Band Die allgemeine Relativitätstheorie. Braunschweig, 1923. — WEYL, *Raum-Zeit-Materie*. Springer, Berlin 1923. — EDDINGTON, *Die Relativitätstheorien in mathematischer Behandlung*.

4. G. ALLIATA, *Helv. Phys. Acta*, **24**, 607 (1951). — F. CZERWENKA und viele andere, private Zuschriften.

5. S. etwa G. Joos, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Leipzig 1932, S. 204 ff.

6. S. etwa Joos, S. 398 oder E. SCHRÖDINGER, *Space-Time Structure*, Cambridge University Press 1950.

7. A. EINSTEIN, *Sitz.-Ber. d. Preuss. Akademie*, Berlin, S. 414 (1925).

8. L. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton, 1926; ferner die unter 3 erwähnten Lehrbücher.

9. WESTPHAL, *Physik*, Berlin 1941, 7. Auflage, S. 567.

10. Rechengang analog zu LAUE, s. 3, S. 189 mit $\lambda \neq 0$ durchzuführen.

11. GAMOW, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 365 (1949). — McVITTIE, *Cosmological Theory*, London-Methuen, 1949.

12. LAUE, s. unter 3., S. 239.

13. LEMAITRE, Vortrag in Dublin (einer frdl. mündlichen Mitteilung von Prof. SCHRÖDINGER an den Verfasser zufolge), McVITTIE, s. 11.

14. S. z. B. M. KOHLER, *Z. f. Physik*, **130**, 139 (1951).

15. LAUE, s. 3., S. 228.

16. FIERZ-PAULI, Proc. Roy. Soc. **173**, 211 (1939). — FIERZ, Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939). — DIRAC, Proc. Roy. Soc. **155**, 447 (1936). — WENTZEL, Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943, Deuticke. — DE BROGLIE-TONNELAT, C. R. Paris, **218**, 675 (1944). — TONNELAT, Annales de Physique, **19**, 396 (1944). — S. aber auch die Gegenmeinung über Gravitationswellen: SCHEIDEGGER, Proceed. 2nd Math. Congress Vancouver (1949).
17. Dissertation SKOTY, Innsbruck (in Vollendung). Die Gravitation als Austauschkraft. Spinwirkungen der Gravitation.
18. WEYL, s. 3. — EISENHART, Non-Riemannian Geometry, American Mathematical Society 1927.
19. E. SCHRÖDINGER, Space-Time-Structure, s. unter 6.
20. E. SCHRÖDINGER, Proc. R. Ir. Ac., **51** A 163 (1947); 205 (1947).
21. E. SCHRÖDINGER, Studies in the Non Symmetric Generalization of the Theory of Gravitation I, Comm. Dublin Inst. f. Adv. Studies A No. 6 (1951).
22. BORN, Proc. Roy. Soc. A **143**, 410 (1934); **144**, 425 (1934). — E. SCHRÖDINGER, Proc. R. Ir. Ac. A **47**, 77; **48**, 91 (1942).
23. CAP, Die Elektrodynamik der einheitlichen Feldtheorie (in Vorbereitung), s. auch die kurze Bemerkung von E. SCHRÖDINGER in Proc. R. Ir. Ac. A **51**, 205 (1948).
24. INGRAHAM, Paris, nach einer frdl. mündlichen Mitteilung v. Prof. E. SCHRÖDINGER an den Verfasser.
25. INFELD-SCHIEDEGGER, Can. Journal of Mathematics, **3**, 195 (1951). — EINSTEIN-INFELD-HOFFMANN, Ann. of Math., **39**, 66 (1938).
26. CAP, Wechselwirkung von Leptonen (Acta Phys. Austriaca, **6**, Bd. VI/1, 35 (1952).
27. HEITLER, Quantum Theory of Radiation, Oxford 1949.
28. HÖNL, Z. f. Physik, **112**, 65 (1939).
29. PAPAPETROU, Strenge zentralsymmetrische Lösung der einheitlichen Feldtheorie, Zitat unbekannt.
30. WENTZEL, s. 16.
31. DE BROGLIE, Mecanique ondulatoire de Photon, Paris 1949.
32. EINSTEIN führt im „Appendix“ (Meaning of Relativity) vor allem kosmologische Gründe für $\lambda = 0$ an; s. aber 11.
33. LEMAITRE, L'Hypothèse de l'Atome Primitif, Neuchâtel 1946, s. 11., 3.
34. KEMMER, Proc. Roy. Soc. vom 9. 2. 1938, vol., **87**, p. 127.
35. TONNELAT, Théorie unitaire affine du champ physique, J. de phys. et rad., **12**, 81 (1951).
36. DE BROGLIE, le Méson, Paris 1945.
37. SERINI, Rend. Ace. Linc. **27**, 235 (1918).
38. Zusatz bei der Korrektur: s. aber W. BONNOR, Proc. Roy. Soc., **43**, 427 (1951), the general static spherically symmetric solution in EINSTEIN's unified field theory.
39. Zusatz bei der Korrektur: s. auch PAPAPETROU, Spinning test particles in general relativity, Proc. Roy. Soc., **43**, 248, 259 (1951).

On the Equations of Isotropic Turbulence In Magneto-Hydrodynamics of Compressible Medium.

By

M. Z. E. Krzywoblocki, University of Illinois.

(Received April 28, 1952.)

Introduction.

BATCHELOR and next CHANDRASEKHAR [1] developed the invariant theory of isotropic turbulence in the magneto-hydrodynamics of an incompressible medium. In the present paper the author derives the generalized equations of isotropic turbulence in magneto-hydrodynamics taking into account compressibility phenomena. All the possible equations, appearing in the hydrodynamics of compressible media, including that of energy, are taken into account. The assumption $\rho = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, permits one to reduce the equations derived below to forms identical with those given by previous authors. The author assumes that the reader is acquainted with previous papers on the subject; consequently, only a few items from those papers will be cited, which will be marked by [C.], etc.

1. Basic Formulas and Equations.

In [3] the author used the following four equations: motion (momentum), continuity, state and energy. They are:

$$\rho (u_{i,t} + u_k u_{i,k}) = \tau_{ik,k}, \quad (1.1)$$

$$\tau_{ik} = - \left(p + \frac{2}{3} \mu u_{i,i} \right) \delta_{ik} + \mu \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = u_{i,k} + u_{k,i}, \quad (1.1 a)$$

$$\rho_{,t} + (\rho u_i)_{,i} = 0, \quad p = R \rho T, \quad (1.2)$$

$$J \rho [(c_p T)_{,t} + u_i (c_p T)_{,i}] - (p_{,t} + u_i p_{,i}) = J (k T_{,i})_{,i} + \Phi, \quad (1.3)$$

$$\Phi = \mu \left[2 u_{j,i} u_{j,i} - \left(- \sum_{\sigma=i,j,k} \varepsilon_{ij\sigma} u_{j,i} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu (u_{i,i})^2, \quad (1.3 a)$$

where the usual GIBBS' tensor notation is applied and the symbols used denote: μ coefficient of viscosity, τ_{ik} stress tensor, δ_{ij} the KRONECKER delta, Φ the dissipation function and the skew-symmetric quantities $\varepsilon_{ij\sigma}$ are equal to $+1$ or -1 , according to whether the

indices i, j, σ , are even or odd permutations of the sequence of integers 1, 2, 3. Otherwise, they are equal to zero by definition.

Equation (1.1) can be written in the form:

$$\varrho(u_{i,t} + u_k u_{i,k}) = -p_{,i} - \frac{2}{3}(\mu u_{k,k})_{,i} + [\mu(u_{i,k} + u_{k,i})]_{,k}. \quad (1.4)$$

Under the assumption that all the random variables show the properties of isotropy and homogeneity and are dependent, the author derived in [3] the following generalized fundamental equations for the propagation of velocity-, temperature-, and pressure-correlation functions, respectively:

$$\begin{aligned} & \overline{(\eta f)_{,t}} + 2 \overline{(\eta h)_{,r}} + 4 r^{-1} \overline{(\eta h)} + 2 K^{(2)} = \\ & = 2 r^{-3} \int r^2 m dr - m + \overline{\beta(f_{,rr} + 4 r^{-1} f_{,r} + 2 N)} + \\ & + 2 \overline{\beta_{,r} f_{,r}} - \frac{1}{3} (r \overline{\beta N})_{,r} - r \overline{\beta_{,r} N}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} & J \left[\overline{u^2 \eta (c_p c'_p T T')_{,t}} - \frac{1}{3} r \overline{K^{(3)} (c_p c'_p T T')_{,r}} \right] - \\ & - R^{-1} \overline{u^2 (c_p \dot{p}_{,t} + c'_p \dot{p}_{,t})} + \frac{1}{3} r R^{-1} \overline{\eta^{-1} K^{(3)} (\dot{p}_{,r} c'_p \dot{p}' + \dot{p}_{,r}' c_p \dot{p})} = \\ & = J \overline{u^2 \{[\gamma (T T')_{,r}]_{,r} + 2 r^{-1} \gamma (T T')_{,r}\}} + W, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$W = -5 \lambda \overline{[3 f_{,rr}(0) + N(0)]}, \quad (1.6 a)$$

$$\overline{\dot{p} \dot{p}'} = R^2 \overline{\eta T T'}, \quad (1.7)$$

where the symbols used denote:

$$\eta = \overline{\varrho \varrho'}, \quad K^{(2)} = \overline{\eta_{,t} u^2}, \quad m = \overline{\dot{p} \varrho_{,t}'} + \overline{\dot{p}' \varrho_{,t}}, \quad (1.8)$$

$$\beta = \overline{\mu \varrho'} + \overline{\mu' \varrho}, \quad N = \overline{\eta^{-1} (r^{-1} \eta_{,r} f + L)},$$

$$L = r^{-3} \int \overline{\varrho_{,t} \varrho_{,t}'} r^2 dr, \quad K^{(3)} = 3 r^{-3} \int r^2 K^{(2)} dr,$$

$$\gamma = \overline{\varrho c_p k'} + \overline{\varrho' c'_p k}, \quad \lambda = \overline{u^2 (\mu \varrho' c'_p T' + \mu' \varrho c_p T)}.$$

The symbols f and h are used in the same meaning as in KÁRMÁN-HOWARTH theory. Moreover, in [4] the author derived the fundamental equation for the propagation of the density correlation function:

$$\eta_{,t} = r (w_1 - w_2)_{,r} + 3 (w_1 - w_2), \quad w_1 \xi_i = \overline{\eta u_i}, \quad w_2 \xi_k = \overline{\eta u'_k}. \quad (1.9)$$

Following the theory developed by BATCHELOR and CHANDRASEKHAR in magneto-hydrodynamics, on the left-hand side of (1.5) one has to add the term $-\varrho_0 \frac{\mu^{(1)}}{\mu_0^{(1)}} (h_i h_k)_{,k}$, on the right-hand side of (1.5) the term

$-\frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{\mu_0^{(1)}} (\mu^{(1)} |\vec{h}|^2)_{,i}$ where the symbol \vec{h} denotes the vector of the dimensions of a velocity:

$$\vec{h} = [\mu_0^{(1)} (4\pi \varrho_0)^{-1}]^{1/2} \vec{H}, \quad \mu_0^{(1)} = \text{const.}, \quad \varrho_0 = \text{const.} \quad (1.10)$$

Here \vec{H} is the magnetic field intensity vector (solenoidal). Moreover, the modified MAXWELL's equation is considered in the form:

$$\varrho_0 h_{i,t} + \varrho_0 (h_i u_k - h_k u_i)_{,k} = \varrho_0 \lambda^{(1)} \nabla^2 h_i, \quad (1.11)$$

$$\lambda^{(1)} = (4\pi \mu^{(1)} \sigma)^{-1}. \quad (1.11 a)$$

The symbol $\mu^{(1)}$ denotes the magnetic permeability. σ the electric conductivity and ∇^2 the LAPLACIAN operator. The quantities $\mu_0^{(1)}$ and ϱ_0 are conventionally chosen constants with proper dimensions.

2. Additional Tensor Forms.

In addition to the tensor forms derived in [3] a few more tensor forms must be derived for the present case. The following linear forms will be used:

$$\varrho' u_j' \left[p + \frac{1}{2} (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \mu^{(1)} |\vec{h}|^2 \right] = m_1^{(1)} \xi_j, \quad (2.1 a)$$

$$\varrho u_i \left[p' + \frac{1}{2} (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \mu^{(1)'} |\vec{h}|^2 \right] = m_2^{(1)} \xi_i. \quad (2.1 b)$$

Hence instead of m in (1.5) one has to use the form

$$m^1 = \left[p + \frac{1}{2} (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \mu^{(1)} |\vec{h}|^2 \right] \varrho' + \left[p' + \frac{1}{2} (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \mu^{(1)'} |\vec{h}|^2 \right] \varrho. \quad (2.2)$$

Since the vector \vec{h} is solenoidal, reasoning analogous to that in [2, p. 204] easily shows that the linear forms

$$\eta^{(2)} |\vec{h}|^2 h_j', \quad \varrho' p h_j', \quad \eta^{(2)} = (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \mu^{(1)} \varrho', \quad (2.3)$$

must vanish identically.

The tensor [C.]

$$\overline{h_i h_j'} = r^{-1} H_{,r} \xi_i \xi_j - (r H_{,r} + 2H) \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

is clearly symmetrical and solenoidal in its indices. To have a certain analogy to the forms used in [K. H.] or [K.], one may write (2.4) in the form:

$$\overline{h_i h_j'} = r^{-2} (f^{(m)} - g^{(m)}) \xi_i \xi_j + g^{(m)} \delta_{ij}, \quad (2.4 a)$$

with

$$f^{(m)} = -2H, \quad f_{,rr}^{(m)}(0) = -4H_2, \quad H = H_0 + H_2 r^2 + 0(r^4).$$

The tensor $\overline{u_i h_j'}$ is skew and solenoidal since any skew-isotropic tensor is automatically solenoidal. Hence it is of the form [R., C.]:

$$\overline{u_i h_j'} = R_{ij}^{(0)}(r, t) \varepsilon_{ijl} \xi_l. \quad (2.5)$$

To obtain the trilinear form $\overline{\eta h_i h_j u_k} = S_{ijk}^{(1)}$, which is isotropic, symmetrical in the indices i and j , but not solenoidal in the index k , multiply the equation of continuity at the point P , written in the form $\varrho_{,t} + (\varrho u_i)_{,i} = 0$ by $\varrho' h'_j h'_k$, and that at P' in the form $\varrho'_{,t} + (\varrho' u'_k)_{,k'} = 0$ by $\varrho h_i h_j$, and add those two equations keeping in mind that

$$\begin{aligned} \overline{\partial/\partial x_i} &= -\overline{\partial/\partial \xi_i}, & \overline{\partial/\partial x'_i} &= \overline{\partial/\partial \xi_i}, \\ \overline{\varrho \varrho' h_i h_j u'_k} &= -\overline{\varrho \varrho' h'_i h'_j u_k}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

One obtains due to isotropy $\overline{h_i^2} = \overline{h_j^2} = \overline{h^2}$:

$$2 S_{ijh,k}^{(1)} = -\overline{(h_i h_j \varrho \varrho'_{,t} + h'_j h'_k \varrho_{,t} \varrho')} = -\overline{h^2 \eta_{,t} \delta_{ij}}. \quad (2.6)$$

The divergence of the general form $S_{ijk}^{(1)}$

$$S_{ijk}^{(1)} = S_1^{(1)} \xi_i \xi_j \xi_k + S_2^{(1)} (\xi_i \delta_{jk} + \xi_j \delta_{ik}) + S_4^{(1)} \xi_k \delta_{ij}, \quad (2.6 a)$$

with respect to the index k is a second order tensor Q_{ij} whose defining scalars are given in [5]. Since all the defining scalars are only functions of r and t , the coefficients of $\xi_i \xi_j$ and δ_{ij} must vanish separately, thus giving two equations in $S_1^{(1)}$, $S_2^{(1)}$, $S_4^{(1)}$. Introduce the quantity

$$S^{(1)} = r^2 S_1^{(1)} + 2 S_2^{(1)} + 3 S_4^{(1)}.$$

From this system of three equations one can easily get the values:

$$S^{(1)} = -\frac{3}{2} r^{-3} \int r^2 \overline{h^2 \eta_{,t}} dr + r^{-3} C(t), \quad (2.7)$$

$$S_1^{(1)} = r^{-1} \left(S_{4,r}^{(1)} - \frac{1}{3} S_{,r}^{(1)} \right), \quad (2.8)$$

$$S_2^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} r S_{,r}^{(1)} + S^{(1)} - r S_{4,r}^{(1)} - 3 S_4^{(1)} \right). \quad (2.9)$$

In order that $S^{(1)}$ be regular at the origin, $C(t)$ must vanish identically. The function $S_4^{(1)}$ is an even function of r of the form $S_4^{(1)} = S_{40}^{(1)} + S_{42}^{(1)} r^2 + O(r^4)$ for $r \rightarrow 0$, i. e., for small r , and it is analogous to $2 S$ in [1]. To obtain a perfect analogy with the forms used in [2, 3] one may apply the function $s_4^{(1)} = r S_4^{(1)}$. Notice that the trilinear form $S_{ijk}^{(1)}$ is perfectly analogous to the trilinear form $T_{ijk}^{(10)}$ with $\overline{\eta_{,t} h^2}$ inserted in place of $K^{(2)}$. Hence no further explanations are necessary since the procedure identical to that in [3] can be used. In the final step there occur fundamental changes since one has to use the tensor form $S_{ijk} = \eta^{-1} S_{ijk}^{(1)}$, and the scalar functions $S_i = \overline{\eta^{-1} S_i^{(1)}}$, $i = 1$ to 4 , S_i 's corresponding to scalar functions in incompressible fluid flow. The bilinear form $S_{ijk, \xi j}$ may be easily calculated [R.]. It is equal to

$$S_{ijk, \xi j} = (\eta^{-1})_{,r} S_{ijk}^{(1)} r^{-1} \xi_j + \eta^{-1} S_{ijk, \xi j}^{(1)}. \quad (2.10)$$

The first bilinear form in (2.10) after all the transformations gives the expression:

$$\overline{(\eta^{-1})_{,r} S_{ijk}^{(1)} r^{-1} \xi_j} = \overline{(\eta^{-1})_{,r} \{ [S^{(1)} - S_2^{(1)} - 2 S_4^{(1)}] r^{-1} \xi_i \xi_k + S_2^{(1)} r \delta_{ik} \}}. \quad (2.11)$$

Similarly, as above, the function $s_4^{(1)} = \overline{\eta s_4}$ will be used. The trilinear form

$$\overline{(h_i u_k - h_k u_i) h'_j} = P_{ikj}, \quad (2.12)$$

is anti-symmetrical in the indices i and k , and solenoidal in the index j . Thus the divergence of P_{ikj} with respect to its last index vanishes and (2.12) must be of the form $[C,]$:

$$P_{ikj} = P (\xi_i \delta_{jk} - \xi_k \delta_{ij}). \quad (2.13)$$

The trilinear form

$$\overline{\eta u_i u_k h'_j} = U_{ikj}, \quad (2.14)$$

is a skew-isotropic tensor symmetrical in the indices i and k and solenoidal in j . Following $[C,]$ it must be of the form

$$U_{ikj} = U [\xi_i \varepsilon_{kjl} \xi_l + \xi_k \varepsilon_{ijl} \xi_l], \quad (2.15)$$

where the defining scalar U is an even function of r . By elementary differentiation one gets:

$$U_{ikj, k} = - (r U_{,r} + 5 U) \varepsilon_{ijl} \xi_l. \quad (2.16)$$

Multiply the continuity equation at P by $\varrho' u_i h'_j$ thus obtaining:

$$\varrho_{,t} \varrho' u_i h'_j + (\eta u_k)_{,k} u_i h'_j = 0. \quad (2.17)$$

Hence

$$\overline{\eta u_{i,k} u_k h'_j} = \overline{U_{ikj,k} - (\eta u_k)_{,k} u_i h'_j} = - [(r U_{,r} + 5 U) - \varrho_{,t} \varrho' R^{(0)}] \varepsilon_{ijk} \xi_l. \quad (2.18)$$

Since $h_{i,k} h_k = (h_i h_k)_{,k}$, the trilinear form

$$V_{ikj} = \overline{h_i h_k h'_j} = V (\xi_i \varepsilon_{kjl} \xi_l + \xi_k \varepsilon_{ijl} \xi_l), \quad (2.19)$$

is a skew third-order tensor, symmetrical in i and k and solenoidal in j with V being an even function of r . Hence the derivative has the form

$$V_{ikj, k} = (r V_{,r} + 5 V) \varepsilon_{ijl} \xi_l. \quad (2.20)$$

The form $[\mu \varrho' (u_k h'_j)_{,k}]_{,i}$ vanishes identically since

$$R_{kij, k}^{(0)} = R_{,r}^{(0)} r^{-1} \xi_k \varepsilon_{kjl} \xi_l + R^{(0)} \varepsilon_{kjl} \delta_{kl} \equiv 0, \quad (2.21)$$

is equal identically to zero.

The form

$$\overline{\{\mu \varrho' [(u_i h'_j)_{,k} + (u_k h'_j)_{,i}]\}_{,k}} = \overline{\{\mu \varrho' (R_{ij,k}^{(0)} + R_{kj,i}^{(0)})\}_{,k}}, \quad (2.22)$$

after all the transformations gives the result:

$$\overline{[(\mu \varrho' R_{,r}^{(0)})_{,r} + 4 r^{-1} \mu \varrho' R_{,r}^{(0)}] \varepsilon_{ijl} \xi_l}. \quad (2.23)$$

The trilinear form

$$\overline{\eta u_i (h'_j u'_k - h'_k u'_j)} = \overline{W_{ijk}^{(1)}} = \eta W_{ijk}, \quad (2.24)$$

is a skew-isotropic tensor anti-symmetric in j and k , but not solenoidal in i (as it would be in the case of an incompressible fluid). Multiply the continuity equation at P by $\varrho' (h'_j u'_k - h'_k u'_j)$, that at P' by $\varrho (h_j u_k - h_k u_j)$, use the equality

$$\overline{\eta u_i h'_j u'_k} = -\overline{\eta u'_i h_j u_k}, \quad \text{etc.},$$

and add these two equations, thus obtaining:

$$2 W_{ijk, \xi i}^{(1)} = \varrho_{,i} \varrho' (h'_j u'_k - h'_k u'_j) + \varrho \varrho_{,i} (h_j u_k - h_k u_j). \quad (2.25)$$

Since the tensor on the right-hand side of (2.25) is skew, it must be of the form $W^{(0)} \varepsilon_{jkl} \xi_l$. To find the form $W_{ijk}^{(1)}$ one can begin with the general isotropic four-linear form:

$$\begin{aligned} W_{ijkl} = & W_1 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + W_2 \xi_i \xi_j \delta_{kl} + W_3 \xi_i \xi_k \delta_{jl} \\ & + W_4 \xi_i \xi_l \delta_{jk} + W_5 \xi_j \xi_k \delta_{il} + W_6 \xi_j \xi_l \delta_{ik} \\ & + W_7 \xi_k \xi_l \delta_{ij} + W_8 \delta_{ij} \delta_{kl} + W_9 \delta_{ik} \delta_{jl} \\ & + W_{10} \delta_{il} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Following [5], in order to obtain a trilinear skew-isotropic form, one has to multiply (2.26) by ε_{ijn} and sum over i and j . As one may easily notice, the coefficients of terms containing W_1, W_2, W_7, W_8 , give zero as the result. Changing in the coefficients of W_5 and W_6 the index j into i and putting $W_3 - W_5 = W_I$, $W_4 - W_6 = W_{II}$, $W_9 - W_{10} = W_{III}$, one gets:

$$W_{ijk} \varepsilon_{ijn} = W_I \xi_i \xi_k \varepsilon_{iln} + W_{II} \xi_i \xi_l \varepsilon_{ikn} + W_{III} \varepsilon_{ikln}. \quad (2.27)$$

Changing the index l into j , etc., one can easily see that $W_{II} = -W_I$, since W_{ijk} must be anti-symmetric in j and k . The final form is:

$$W_{ijk}^{(1)} = W_I (\xi_j \varepsilon_{kil} \xi_l + \xi_k \varepsilon_{ijl} \xi_l) - W_{III} \varepsilon_{ijk}. \quad (2.28)$$

This is in agreement with eq. 38 in [C.]. Combining (2.25) and (2.28) one gets

$$2 (2 W_I + W_{III, r} r^{-1}) \varepsilon_{kjl} \xi_l = -W^{(0)} \varepsilon_{kjl} \xi_l. \quad (2.29)$$

Let

$$W_I = r^{-1} W_{,r}^{(1)}, \quad (2.30)$$

then from (2.29) one can easily get

$$W_{III} = -2 W^{(1)} - \frac{1}{2} \int r W^{(0)} dr, \quad (2.31)$$

and the final form of $W_{ijk}^{(1)}$ is

$$W_{ijk}^{(1)} = r^{-1} W_{,r}^{(1)} (\xi_j \varepsilon_{kil} \xi_l + \xi_k \varepsilon_{ijl} \xi_l) + \left(2 W^{(1)} + \frac{1}{2} \int r W^{(0)} dr \right) \varepsilon_{ijk}. \quad (2.32)$$

The derivative of $W_{ijk}^{(1)}$ with respect to the index k is equal to:

$$W_{ijk, \xi k}^{(1)} = \left(W_{,rr}^1 + 4 r^{-1} W_{,r}^{(1)} + \frac{1}{2} W^{(0)} \right) \varepsilon_{ijl} \xi_l. \quad (2.33)$$

The form $\overline{\eta u_i (h'_j u'_k - h'_k u'_j)_{,k}}$, may be calculated by means of the difference

$$\begin{aligned} \overline{\eta u_i (h'_j u'_k - h'_k u'_j)_{,k}} &= \overline{W_{ijk, \xi k}^{(1)} - \eta_{,k} \eta^{-1} W_{ijk}^{(1)}} = \\ &= \overline{W_{ijk, \xi k}^{(1)} - \eta_{,r} \eta^{-1} \left[W_{,r}^{(1)} + 2 r^{-1} W^{(1)} + \frac{1}{2} r^{-1} \int r W^{(0)} dr \right] \varepsilon_{ijl} \xi_l}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

with $W_{ijk, \xi k}^{(1)}$ given by (2.33).

The LAPLACIAN of the form (2.5) is given by [5]:

$$\nabla^2 u_i h'_j = R_{,rr}^{(0)} + 4 r^{-1} R_r^{(0)} = D(R^{(0)}). \quad (2.35)$$

3. The Equations Governing the Scalars.

Multiply the equation of motion (momentum) at P (1.4) with the additional terms due to the magnetic field intensity by $\varrho' u'_j$, and that at P' , written in the form $\varrho' (u'_{k,t} + u'_j u'_{k,j}) + \dots = \dots$, by ϱu_i , express all terms in their corresponding isotropic forms and add the resulting expressions. Next apply a procedure identical to the one in [3]. With the use of (2.2) and (2.11) the result is that on the left-hand side of (1.5) the terms

$$\begin{aligned} &\overline{(\varrho_0/\mu_0^{(1)}) (\varrho' \mu^{(1)} + \varrho \mu^{(1')}) \{ - (r S_{4,r} + 5 S_4) + \\ &+ (\eta_{,r}/\eta) r S_4 - \eta^{-1} [(\eta_{,r}/\eta) r S^{(1)} + \eta_{,t} h^2] \}} = \overline{(\varrho_0/\mu_0^{(1)}) (\varrho' \mu^{(1)} + \\ &+ \varrho \mu^{(1')}) \{ - (s_{4,r} + 4 r^{-1} s_4) + (\eta_{,r}/\eta) s_4 - \eta^{-1} [(\eta_{,r}/\eta) r S^{(1)} + \eta_{,t} h^2] \}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

have to be added and on the right-hand side the random function m has to be replaced by $m^{(1)}$. The equations (1.7) and (1.9) remain unchanged.

Multiply equation (1.11) by h'_j and apply the procedure identical to that in [K. H.] or [C.]. Since there are no basic changes at this point, one obtains equation identical to eq. 53 in [1] except for the mean value in the last term:

$$\varrho_0 H_{,t} = 2 \varrho_0 P + 2 \varrho_0 \overline{\lambda^{(1)} D(H)}. \quad (3.2)$$

Another equation governing the scalars can be obtained in the following manner: Multiply equation (1.4) by $\varrho' h'_j$ and (1.11) written in the primed variables for h'_j by ηu_i , average both equations and add them. With the use of (2.18), (2.20), (2.21), (2.23), (2.34), (2.35) one gets:

$$\begin{aligned} \overline{\eta R_{,t}^{(0)} + \eta (\ln \varrho)_{,t} R^{(0)}} &= \overline{(r U_{,r} + 5 U) - \eta^{(2)} (r V_{,r} + 5 V) - D(W^{(1)}) - \\ &- \frac{1}{2} W^{(0)} + \eta_{,r} \eta^{-1} \left(W_{,r}^{(1)} + 2 r^{-1} W^{(1)} + \frac{1}{2} r^{-1} \int r W^{(0)} dr \right) + \\ &+ (\lambda^{(1)} \eta + \mu \varrho') D(R^{(0)}) + (\mu \varrho')_{,r} R_{,r}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. The Dissipation of Energy by Viscosity and Electric Conduction.

Let

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_2 r^2 + \dots, & P &= P_0 + P_2 r^2 + \dots, \\ S_4^{(1)} &= S_{40}^{(1)} + S_{42}^{(1)} r^2 + \dots, & S_4 &= S_{40} + S_{42} r^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.1)$$

represent the series expansions for the various functions near $r = 0$. Substituting these expansions in equation (3.2) and equating the terms independent of r , gives the result:

$$\varrho_0 H_{0,t} = 2 \varrho_0 P_0 + 20 \varrho_0 \overline{\lambda^{(1)} H_2}. \quad (4.2)$$

On the other hand one has according to equation (2.4 a):

$$\overline{h^2} = \overline{[h_i h_i']}_{r=0} = -6 H_0. \quad (4.3)$$

Consider the correlation between h_1^2 at $(0, 0, 0)$ and u_1' at $(r, 0, 0)$. Then from (2.6 a) one has with $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$ and with the use of (2.8) and (2.9):

$$S_{111} = \overline{h_1^2 u_1'} = S_1 r^3 + 2 S_2 r + S_4 r = r (S - 2 S_4). \quad (4.4)$$

Similarly, the correlation between h_2^2 and u_1' is given by the formula (with $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$):

$$S_{221} = \overline{h_2^2 u_1'} = S_4 r. \quad (4.5)$$

For $r = x_1 \rightarrow 0$, with the use of (2.7) equation (4.4) may be transformed into:

$$\begin{aligned} \overline{h_1^2 u_{1,x_1}} \Big|_{x_1 \rightarrow 0} &= (S - 2 S_4)_{x_1 \rightarrow 0} \\ &= -\varrho^{-1} \varrho_{,t} \overline{h_1^2} - 2 S_{40}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

or

$$S_{40} = -\frac{1}{2} \overline{h_1^2 u_{1,x_1}} - \frac{1}{2} \varrho^{-1} \varrho_{,t} \overline{h_1^2}. \quad (4.7)$$

Similarly, from (4.5) one obtains:

$$S_{40} = \overline{h_2^2 u_{1,x_1}}. \quad (4.8)$$

From comparison of (4.7) and (4.8) one may easily derive the equality:

$$\overline{h_2^2 u_{1,x_1}} = -\frac{1}{2} \overline{h_1^2 u_{1,x_1}} - \frac{1}{2} \varrho^{-1} \varrho_{,t} \overline{h_1^2}. \quad (4.9)$$

For $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, one readily calculates from (2.12) the value of P_{122} :

$$P_{122} = (h_1 u_2 - h_2 u_1) \overline{h_2'} = P x_1. \quad (4.10)$$

Letting $x_1 \rightarrow 0$ in this equation, one gets:

$$P_0 = (\overline{h_1 u_2} - \overline{h_2 u_1}) \overline{h_2}_{x_1=0}. \quad (4.11)$$

The correlation $h_1 u_2 h_2$, referring to $x_1 = 0$ is independent of x_i , $i = 1, 2$ or 3 , since the turbulence is assumed to be homogeneous and isotropic. Using this item after a few transformations identical to those in [1, p. 439], one obtains:

$$P_0 = -\overline{h_1 h_2 u_{2, x_1}} - \frac{1}{4} \overline{h_1^2 u_{1, x_1}} + \frac{1}{2} \overline{h_2^2 u_{1, x_1}}, \quad (4.12)$$

or with the use of (4.9)

$$P_0 = -\overline{h_1 h_2 u_{2, x_1}} - \frac{1}{2} \overline{h_1^2 u_{1, x_1}} - \frac{1}{4} \overline{\varrho^{-1} \varrho_{, t} h_1^2}. \quad (4.13)$$

In an analogous way one easily finds that

$$S_{122}^{(1)} = \overline{\eta h_1 h_2 u_2'} = S_2^{(1)} x_1. \quad (4.14)$$

Using (2.9) and approaching the limit $x_1 \rightarrow 0$, with $\overline{h_i^2} = \overline{h^2}$, $i = 1, 2$, or 3, as well as with the equality

$$S_r^{(1)} = -3 r^{-1} S^{(1)} - 3 r^{-1} \overline{\eta_{, t} h^2}, \quad (4.15)$$

one obtains from (4.14):

$$\overline{\eta h_1 h_2 u_{2, x_1}} = \frac{1}{2} (-\overline{\eta_{, t} h^2} - 3 S_{40}^{(1)}), \quad (4.16)$$

or (with $x_i \rightarrow 0$) using (4.7) and $\eta_{, t} \rightarrow 2 \varrho \varrho_{, t}$:

$$\overline{h_1 h_2 u_{2, x_1}} = \frac{1}{4} (\overline{\varrho^{-1} \varrho_{, t} h^2} + 3 \overline{h_1^2 u_{1, x_1}}). \quad (4.17)$$

Inserting (4.17) into (4.12) gives after a few transformations:

$$P_0 = \frac{5}{2} S_{40} + \frac{3}{4} \overline{\varrho^{-1} \varrho_{, t} h^2}. \quad (4.18)$$

Inserting (4.3) into (4.2) and dividing both sides of (4.2) by $\varrho \mu_0^{(1)} (\mu^{(1)})^{-1}$ one gets:

$$\frac{1}{2} (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} d h^2 / dt} = - (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) [6 \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} P_0} + 60 \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} \lambda^{(1)} H_2}]. \quad (4.19)$$

This is the rate of change of the magnetic energy per unit mass. Inserting (4.18) into (4.19) gives:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} d h^2 / dt} = \\ & = - (\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) [15 \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} S_{40}} + 60 \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} \lambda^{(1)} H_2} + \frac{9}{2} \overline{\varrho^{-2} \varrho_{, t} \mu^{(1)} h^2}]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

To obtain from (3.1) the additional rate of change of energy per unit mass at a point, one has to divide (3.1) by 2η , multiply it by 3 (the square of the resultant velocity is equal to the sum of the squares of the velocity components in three directions) and proceed to the limit $r \rightarrow 0$. Since (3.1) has to be transferred on the right-hand side of (1.5), i. e., the sign has to change, one gets jointly with the reduced value of $m^{(1)}(0)$:

$$\left(\varrho_0 / \mu_0^{(1)} \right) \left(15 \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} S_{40}} + \frac{11}{2} \overline{\varrho^{-2} \mu^{(1)} \varrho_{, t} h^2} \right). \quad (4.21)$$

The rate of change of the total energy is given by the sum of the rates of change of kinetic and the magnetic energy. The part due to the magnetic energy in the rate of change of the total energy is equal to the sum of (4.20) and (4.21) (for more details see Ref. 1):

$$(\varrho_0/\mu_0^{(1)}) (-60 \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} \lambda^{(1)} H_2} + \overline{\varrho^{-2} \mu^{(1)} \varrho, i h^2}). \quad (4.22)$$

Using notation from (2.4 a) one may transform (4.22) onto the expression

$$(\varrho_0/\mu_0^{(1)}) [15 \overline{\varrho^{-1} \mu^{(1)} \lambda^{(1)} f_{,rr}^{(m)}(0)} + \overline{\varrho^{-2} \mu^{(1)} \varrho, i h^2}]. \quad (4.23)$$

This means that on the right-hand side of equation (1.6) one has to add the following terms due to the magnetic vector field:

$$\begin{aligned} & -15 (\varrho_0/\mu_0^{(1)}) \overline{u^2 [(\mu^{(1)} \lambda^{(1)} \varrho' c_p T' + \mu^{(1)'} \lambda^{(1)'} \varrho c_p T) f_{,rr}^{(m)}(0)]} - \\ & - (\varrho_0/\mu_0^{(1)}) \overline{u^2 (\mu^{(1)} \varrho^{-1} \varrho, i \varrho' c_p T' + \mu^{(1)'} \varrho'^{-1} \varrho, i \varrho c_p T) h^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Equation (1.5) with the addition of (3.1), (1.6) with the addition of (4.24), (1.7), (1.9), (3.2) and (3.3) constitute the principal system of six generalized fundamental equations for the propagation of the corresponding correlation functions of the isotropic homogeneous turbulence in magneto-hydrodynamics of a compressible medium. Some remarks on the manner of treating the derived equations will be given in a subsequent paper.

Final remarks

Above, the author derived the equations of isotropic turbulence in magneto-hydrodynamics of compressible media. In the subsequent papers the equations of locally isotropic-turbulence in magneto-hydrodynamics of compressible media as well as some discussion on the invariants will be given. Notice that in consideration above the radiation energy was completely ignored.

Bibliography

1. CHANDRASEKHAR, S.: The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics. *Proceedings of the Royal Society, A*, Vol. 204 (1950), pp. 435—449.
2. VON KÁRMÁN, TH., and HOWARTH, L.: On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. *Proceedings of the Royal Society, A*, 164 (1938), pp. 192—215.
3. v. KRZYWOBLOCKI, M. Z.: On the Generalized Fundamental Equations of Isotropic Turbulence In Compressible Fluids and In Hypersonic. *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, Chicago 1951. (To be published.)
4. v. KRZYWOBLOCKI, M. Z.: On the Invariants in the Turbulence in Compressible Viscous Fluids. (To be published.)
5. ROBERTSON, H. P.: The Invariant Theory of Isotropic Turbulence. *Proceedings Camb. Phil. Soc.* Vol. 36 (1940), pp. 209—223.

Über die Stoßquerschnitte in durchdringenden Höhenstrahlungsschauern.*

Von

Kurt Sitte.

Department of Physics, Syracuse University, Syracuse, N. Y.

Mit 4 Abbildungen.

(Eingelangt am 30. April 1952.)

Zusammenfassung.

Die Widersprüche in den Bestimmungen der Stoßquerschnitte für energiereiche Kernzusammenstöße mit verschiedenen Methoden werden diskutiert. Während die Ergebnisse der Zählrohrversuche als eine Zunahme der Stoßlängen mit abnehmender Primärenergie gedeutet wurden, scheinen Experimente mit Nebelkammern oder Emulsionen selbst für Energien unter 10^9 ev zumindest für schwere Elemente einen „geometrischen“ Stoßquerschnitt zu verlangen. Es wird an Hand neuerer experimenteller Ergebnisse gezeigt, daß die Ursache in einer Verfälschung der mit Zählrohranordnungen erhaltenen Werte liegt. Wenn diesem Effekt Rechnung getragen wird, findet man befriedigende Übereinstimmung aller Resultate mit der Annahme eines „geometrischen“ Wirkungsquerschnittes für alle Energien über etwa $0,75 \times 10^9$ ev. In ähnlicher Weise scheint die oftmals beobachtete „Transparenz“ der leichten Atomkerne in diesem Energiebereich ganz oder teilweise auf die Unzulänglichkeit der Versuchsmethoden zurückzuführen zu sein.

I. Allgemeine Übersicht.

Trotz der bemerkenswerten Fortschritte, die die Kernphysik auf Grund der Arbeiten mit den großen Beschleunigungsmaschinen gemacht hat, blieb auch in den letzten Jahren der Beitrag der Höhenstrahlungsforschung zu dem Erfolg der Bemühungen um Klarstellung der Zahl und Natur der Elementarteilchen überwiegend. Zweifellos dürfte es noch für lange Zeit unmöglich sein, mit „künstlichen“ Projektilen alle die vielartigen instabilen Sekundärteilchen herzustellen, die in den durchdringenden Schauern andauernd in der Atmosphäre oder in unseren Versuchsanordnungen von energiereichen Höhenstrahlungsteilchen erzeugt werden.

* Herrn Prof. Dr. V. F. HESS zum 70. Geburtstage gewidmet.

Aber selbst wenn man, unter momentanem Verzicht auf die feineren Einzelheiten in solchen Zusammenstößen, als deren Resultat man die möglicherweise seltenen schwereren „Mesonen“ ansehen könnte¹, sich auf den einfachsten Fall beschränkt und nur die Erzeugung von π -Mesonen in Zusammenstößen zwischen zwei Nukleonen studieren will, kann man eine entscheidende Prüfung der wichtigsten Theorien²⁻⁵ nur im Energiebereich über 10^9 ev erwarten. Es ist sattsam bekannt, und wird in einigen Einzelheiten im folgenden weiters belegt werden, daß erst in diesem Gebiet die Inelastizität der Kernzusammenstöße die Überhand gewinnt. Da Nukleonen von 10^9 ev — 10^{10} ev selbst in zugänglichen Höhen noch verhältnismäßig zahlreich sind, ist das Studium ihrer Reaktionen — der durchdringenden Schauer — zum zentralen Punkt in der Diskussion dieser Theorie geworden.

Offenbar ist für dieses Programm die Bestimmung der Gesamtquerschnitte für energiereiche Kernzusammenstöße die erste Aufgabe. Sobald erkannt worden war, daß diese Zusammenstöße nicht als vollkommen „katastrophal“ angesehen werden können, und daß daher eine klare Unterscheidung zwischen mittlerer Absorptionslänge und mittlerer Stoßlänge gemacht werden muß — die letztere offensichtlich von primärer Bedeutung für das vorliegende Problem —, war es auch leicht, eine geeignete Untersuchungsmethode auszuarbeiten. Die meisten Versuche wurden mit Zählrohren ausgeführt, und das Prinzip der Methode ist in Abb. 1 dargestellt. Die Anordnung besteht aus der Zählrohrgruppe A und der „ P -Gruppe“, deren Zählrohre allseitig von einem Bleipanzern umgeben sind. In Experimenten an geladenen Primärteilchen wird dann verlangt, daß nur ein einziges Zählrohr von A in Koinzidenz mit einer geeigneten Auswahl der P -Zählrohre anspricht, während für Experimente mit neutralen schauererzeugenden Teilchen A in Antikoinzidenz mit P gebracht wird. Wenn nun ein Absorber Σ über A angebracht wird, können nur noch diejenigen Teilchen zu den registrierten Schauern beitragen, die Σ ohne Zusammen-

¹ Diese Annahme ist keineswegs gesichert. Im Gegenteil, die vorläufigen Ergebnisse von PERKINS und Mitarbeitern (Konferenzbericht, Bristol 1951) zeigen, daß für Primärenergien von $\gtrsim 50\,000$ Mev die Anzahl der π -Mesonen ungefähr 40% der gesamten Mesonenproduktion ausmacht, und daß die Energie in dieser Komponente der in den geladenen π -Mesonen gleichkommt. Die ungenügenden Übereinstimmungen zwischen dem beobachteten Verhältnis der Energie in μ -Mesonen und Elektronen in ausgedehnten Schauern, und den Werten, die man unter der Annahme genetischer Zusammenhänge, basiert ausschließlich auf der π - μ - e -Folge, herleiten kann, mag als eine weitere Stütze für ein Modell angesehen werden, in dem den schwereren Elementarteilchen zumindest im Energiebereich $\gtrsim 10^{11}$ ev eine wesentliche Rolle zugeteilt ist.

² W. HEISENBERG, Zs. f. Phys. **113**, 61 (1939); **126**, 569 (1949).

³ H. W. LEWIS, J. R. OPPENHEIMER und S. A. WOUTHUYSEN, Phys. Rev. **73**, 127 (1948).

⁴ W. HEITLER und L. JANOSSY, Proc. Phys. Soc. (A) **62**, 374 (1949).

⁵ E. FERMI, Progr. Theor. Phys. **5**, 570 (1950); Phys. Rev. **81**, 683 (1951).

stoß durchsetzt haben. Das Verhältnis der beiden Schauerarten mit und ohne Σ ist daher ein Maß für die mittlere Stoßlänge Λ .

Einige Verwirrung in den älteren Ergebnissen wurde beseitigt, als die notwendige verschärfte Forderung an die P -Anordnung klar erkannt worden war^{6, 7}: Um wirklich durchdringende Schauer zu registrieren, muß die P -Anordnung zumindest aus zwei Zählrohrgruppen B und C bestehen, die voneinander durch einen Absorber getrennt sind, und in beiden Gruppen müssen Zählrohre ansprechen. Mit Anordnungen, die dieser Forderung Rechnung tragen^{6, 8-10}, sind dann die folgenden maßgeblichen Züge festgestellt worden:

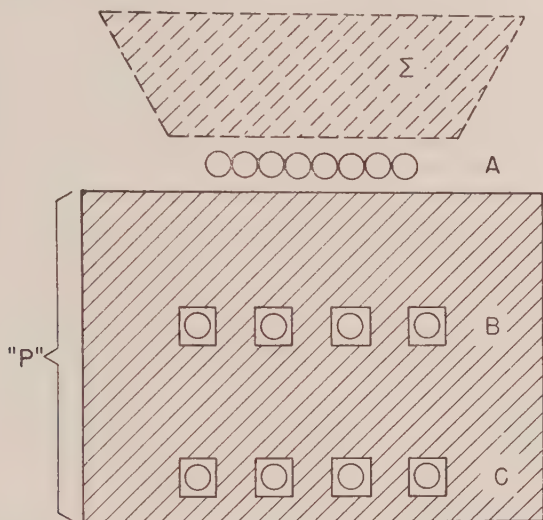


Abb. 1. Schematische Darstellung der Versuchsanordnung für Zählrohrversuche an durchdringenden Schauern.

1. In schweren Materialien, insbesondere in Blei, ist für sehr durchdringende und komplizierte Schauer (die als Zusammenstöße sehr energiereicher Teilchen interpretiert werden können) der gesamte Wirkungsquerschnitt gleich dem „geometrischen“ Kernquerschnitt. Mit abnehmender Primärenergie nimmt er beträchtlich ab: Für Schauer mit wenigen und nicht sehr harten Sekundärteilchen findet man Stoßlängen zwischen 250 und 300 g/cm², anstatt des „geometrischen“ Wertes 165 g/cm².

⁶ K. SITE, Phys. Rev. **78**, 714 (1950).

⁷ G. SALVINI, Nuovo Cimento (9) **7**, 786 (1950).

⁸ W. D. WALKER, Phys. Rev. **77**, 686 (1950).

⁹ K. GREISEN, W. D. WALKER and S. P. WALKER, Phys. Rev. **80**, 535 und 546 (1950).

¹⁰ H. W. BOEHMER und H. S. BRIDGE, Phys. Rev. **85**, 863 (1952).

2. In leichten Materialien ist der Wirkungsquerschnitt stets kleiner als der „geometrische“. Für Schauer der gleichen Multiplizität, für die man in Blei Stoßlängen von 165 g/cm^2 findet, erhält man z. B. in Kohlenstoff (Graphit) mittlere Stoßlängen von $80\text{--}85 \text{ g/cm}^2$, anstatt des entsprechenden geometrischen Wertes von 64 g/cm^2 ^{9, 10}. Das ist der bekannte „Transparenz-Effekt“.

Die befriedigende Übereinstimmung der Ergebnisse verschiedener Autoren in Messungen mit Zählrohranordnungen umfaßt jedoch nicht auch die Resultate, die mit anderen Methoden gefunden wurden. Trotz der Schwierigkeiten, die einem quantitativen Vergleich der in Emulsionen beobachteten Schauer mit den durchdringenden Schauern der Zählrohrversuche im Wege stehen, wird man z. B. den Befund von CAMERINI et al.¹¹, die einen im wesentlichen geometrischen Stoßquerschnitt für die relativistischen *Sekundärteilchen* der Schauer in Emulsionen finden, schwerlich mit den oben erwähnten zunehmenden Stoßlängen nicht allzu energiereicher *Primärteilchen* vereinbaren können. Direkte Messungen der Stoßlängen der *Primärteilchen* können natürlich in Emulsionen nicht vorgenommen werden, aber Nebelkammerversuche, die gleichfalls ein eingehendes Studium der Einzelheiten der Stoßprozesse erlauben, gaben in ähnlicher Weise abweichende Resultate. So haben z. B. GREGORY und TINLOT¹² gezeigt, daß das Verhältnis der Querschnitte in Blei und Aluminium dem geometrischen entspricht, während sie für die Stoßlänge der sekundären π -Mesonen in Blei als obere Grenze 250 g/cm^2 angeben. Eine weitere wichtige Schlußfolgerung aus ihren Daten ist, daß die Multiplizität der Schauer in Blei größer als die in Aluminium ist: ein Ergebnis, das auch von LOVATI et al.¹³ gefunden wurde. Für Kohlenstoff haben WALKER und Mitarbeiter¹⁴ in einem Nebelkammerversuch eine Stoßlänge von $(76 \pm 8) \text{ g/cm}^2$ gefunden.

Das Gesamtbild erscheint daher immer noch etwas verwirrend. Der scheinbar einfachste Ausweg, nämlich die Erklärung ausschließlich in den verschiedenen Energien der in Nebelkammern und Emulsionen beobachteten Schauer einerseits, und den in Zählrohrversuchen registrierten andererseits, zu suchen, ist nicht gangbar. Man müßte dann für diese so geringe Primärenergien annehmen, daß ihre Durchdringungsfähigkeit unerklärt bliebe, und zudem käme man in ernstliche Schwierigkeiten, die Gesamtintensität der schauererzeugenden Komponente zu interpretieren¹⁵. Die Ursache für die Diskrepanz muß daher anderswo gesucht werden.

¹¹ CAMERINI, FOWLER, LOCK und MUIRHEAD, Phil. Mag. **41**, 413 (1950).

¹² B. P. GREGORY und J. H. TINLOT, Phys. Rev. **81**, 667 und 675 (1951).

¹³ LOVATI, MURA, SALVINI und TAGLIAFERRI, Nuovo Cimento (9) **6**, 207 (1949); Phys. Rev. **77**, 342 (1950).

¹⁴ W. D. WALKER, N. W. DULLER und J. D. SORRELS, Phys. Rev. **86**, 865 (1952). Der Verfasser ist Herrn Prof. WALKER für Mitteilung seiner Ergebnisse im Manuskript zu Dank verpflichtet.

¹⁵ K. SITTE, Proc. Phys. Soc. (A) **68**, 295 (1950).

II. Die Energieabhängigkeit der Stoßprozesse in Blei.

Die vorstehenden Ausführungen haben gezeigt, daß der Mangel an einem objektiven Vergleich der Schauer in den verschiedenartigen Anordnungen vielleicht das größte Hindernis für unser Verständnis der Prozesse ist. Solange man insbesondere den Schauern keine absoluten Energiewerte zuordnen kann, sondern sich mit der qualitativen Unterscheidung gemäß „Komplexität“ der Ereignisse begnügen muß, bleibt jeder Versuch einer einheitlichen Interpretation zweifelhaft.

Andererseits sind in allen diesen Methoden Energiemessungen, wenn überhaupt, nur im niedrigsten Energiebereich durchführbar. Es ist aus technischen Gründen unmöglich, große Nebelkammern mit mehreren Platten in ein genügend starkes Magnetfeld zu bringen, so daß Energien um 10^{10} ev gemessen werden könnten. In kleineren Kammern, in denen dies im Prinzip möglich wäre, sind die Ausbeuten zu gering. Ähnliche Argumente gelten für die anderen Techniken; in allen Fällen läßt sich eine ins einzelne gehende Schaueranalyse nicht gleichzeitig mit einer guten Energiebestimmung für die harten Primärteilchen erreichen.

Der Ausweg scheint in einer Kombination mehrerer Methoden in einem einzelnen Experiment zu liegen. Die technischen Schwierigkeiten sind beträchtlich, aber nicht unüberwindbar. Als einen Schritt in dieser Richtung haben wir vor kurzem einen Versuch durchgeführt, in dem eine große Nebelkammer gemeinsam mit einem Hodoskop mit 134 Zählrohren für Beobachtung und Analyse der Schauer benützt wurde. Die Versuchsanordnung und ein Teil der Ergebnisse sind anderwärts beschrieben worden¹⁶, so daß eine kurze Zusammenfassung an Hand der schematischen Skizze von Abb. 2 genügen wird. Die Versuchsergebnisse sollen nur insoweit eingehend ausgeführt werden, als sie für die nachfolgende Analyse gebraucht werden.

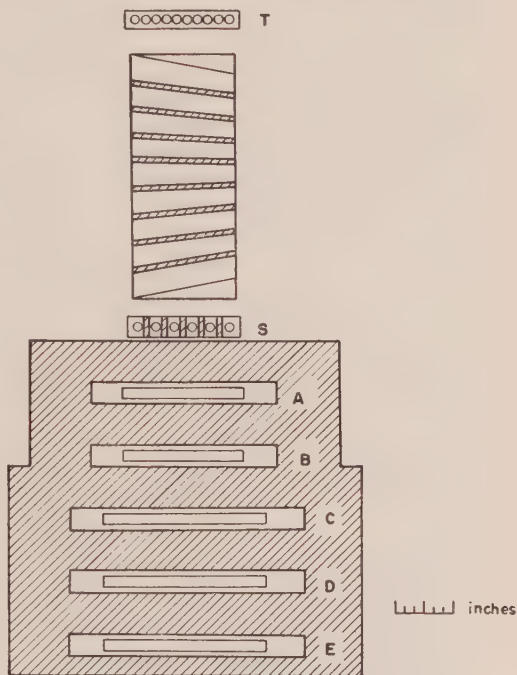


Abb. 2. Die Versuchsanordnung von FROEHLICH, HARTH und SITTE.

¹⁶ F. E. FROEHLICH, E. M. HARTH und K. SITTE, Phys. Rev. **87**, 504 (1952).

Abb. 2 zeigt die Nebelkammer (Dimensionen $60 \times 60 \times 25$ cm) mit ihren 8 Bleiplatten von 1,25 cm Dicke in Seitenansicht. Über und unter der Kammer befanden sich zwei Zählrohrgruppen T (10 Zählrohre $2,5 \times 40$ cm) und S (6 Zählrohre gleicher Größe, voneinander getrennt durch 1,9 cm Pb). Die Hodoskopanordnung bestand aus 5 Zählrohrgruppen mit je 20, 24, 28, 30 und 32 Zählrohren. Der Bleipanzern über jeder Gruppe war etwa 10,2 cm dick, und ruhte auf 0,6 cm Stahlplatten, so daß die gesamte Absorberdicke im Hodoskop ungefähr 600 g/cm^2 betrug.

Ereignisse, in denen nur ein Zählrohr in T zusammen mit zumindest zwei Zählrohren in S ansprachen, bildeten den „Meisterpuls“, der sowohl die Nebelkammer, als auch die Hodoskopanordnung auslöste. Auf diese Weise war es möglich, die Einzelheiten der in den Bleiplatten der Kammer stattfindenden Kernzusammenstöße in den Nebelkammern zu studieren, und gleichzeitig die weitere Entwicklung der „Nukleonenkaskade“ im Hodoskop zu verfolgen. Insbesondere kann man dann aus den „integralen Weglängen“ dieser Schauer Schlüsse auf die Energien der einfallenden Primärteilchen ziehen.

Der Hauptzweck dieses Versuches war das Studium der mittleren Multiplizitäten und der Zusammensetzung der Schauerteilchen als Funktion der Primärenergie, sowie eine Bestimmung des Verhältnisses der Querschnitte für die Erzeugung geladener und neutraler π -Mesonen. Es wurde bestätigt, daß die Zusammenstöße im wesentlichen elastisch sind, solange die Primärenergien nicht größer als etwa 2×10^9 ev sind, während sie für höhere Energien überwiegend inelastisch werden. Gewisse Schranken für die zulässigen Parameter der verschiedenen Theorien der Mesonenproduktion²⁻⁵ konnten abgeleitet, aber keine eindeutige Entscheidung zwischen ihnen konnte getroffen werden. Die Absorptionskurve der Sekundärteilchen und das Energiespektrum der Primärteilchen wurden erhalten.

Für die weitere Diskussion müssen aus der Vielfalt der Ergebnisse zwei Punkte herausgegriffen werden:

1. Die mittlere Stoßlänge der Primärteilchen bleibt zumindest in guter Annäherung unverändert, und hat den „geometrischen“ Wert, für alle Primärenergien über 2×10^9 ev. Im Energiebereich zwischen 1×10^9 ev und 2×10^9 ev wurde ein etwas größerer Wert gefunden.

Dieses Ergebnis ist in Abb. 3 wiedergegeben. Die Kreise zeigen die Daten für Primärteilchen in dem niedrigsten Energiebereich, die Punkte beziehen sich auf den Bereich zwischen 2×10^9 ev und 4×10^9 ev, und die Kreuze auf alle Energien über 4×10^9 ev. Die beiden letzteren sind innerhalb ihrer Fehlergrenzen ununterscheidbar; wenn sie in eine Gruppe vereinigt werden, findet man für diese eine Stoßlänge von $(158 \pm 12) \text{ g/cm}^2$, in guter Übereinstimmung mit dem „geometrischen“ Wert von 165 g/cm^2 . Der beste Wert für die Primärteilchen zwischen 1×10^9 ev und 2×10^9 ev ist $(190 \pm 15) \text{ g/cm}^2$.

Diese Ergebnisse bestätigen also auf direktem Wege die Daten über die Energieabhängigkeit der Stoßquerschnitte, die früher in

Experimenten mit Nebelkammern und Emulsionen in indirekter Weise erhalten worden waren. Andererseits ist die Diskrepanz mit den älteren Zählrohrversuchen offensichtlich; es ist ganz ausgeschlossen, den Schauern, für die Stoßlängen um 250 g/cm^2 gemessen wurden, Primärenergien von wesentlich unter $1 \times 10^9 \text{ ev}$ zuzuschreiben.

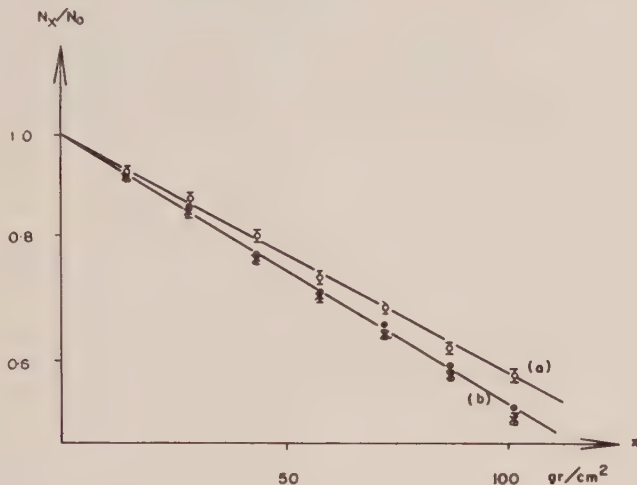


Abb. 3. Die Bruchteile N_x/N_0 der geladenen Primärteilchen, die die Absorberdicke x ohne Zusammenstoß durchsetzen.

2. Die Multiplizitätsverteilung der Sekundärteilchen in Zusammenstößen von Primärteilchen aller Energien über $1 \times 10^9 \text{ ev}$ ist über Erwarten breit. Nur für sehr energiereiche Primärteilchen ist die Wahrscheinlichkeit für Schauer mit geringer Multiplizität sehr klein, und die Verteilungskurve flach; für Schauer mit weniger als $4 \times 10^9 \text{ ev}$ Gesamtenergie sind solche Ereignisse durchaus nicht selten.

Die Ergebnisse sind in Abb. 4 wiedergegeben. Die beobachteten Häufigkeiten von Schauern verschiedener Multiplizität ist für vier Intervalle der Primärenergie E_p dargestellt*. Es ist von Interesse für die Theorie dieser Zusammenstöße, daß die Kurven den Verteilungen, die in Bristol von CAMERINI et al.¹⁷ in ihren Arbeiten mit Emulsionen gefunden wurden, außerordentlich ähnlich sind. Dieser Umstand erlaubt wichtige Schlußfolgerungen über die Parameter insbesondere der pluralen Theorie der Mesonenproduktion¹⁶.

* Die Energie-Einheit „Bev“ ist hier, dem amerikanischen Gebrauch folgend, gleich 10^9 ev gesetzt.

¹⁷ CAMERINI, DAVIES, FRANZINETTI, LOCK, PERKINS und YEKUTIELI, Phil. Mag. 42, 1261 (1951).

III. Diskussion der älteren Zählrohrversuche.

Ein Blick auf die Verteilungskurven von Abb. 4 lehrt bereits, daß offenbar eine Anordnung, die Schauer gemäß ihrer Multiplizität klassifiziert, nur in sehr unzureichendem Maße auch die Primärenergien festlegt. Die eingangs erwähnte Verknüpfung zwischen der „Komplexität“ der Schauer und der Energie der schauererregenden Teilchen ist eine sehr lose; und der Beitrag der Primärteilchen mit gegebener Energie zu den Schauern, deren Multiplizität beträchtlich von der durchschnittlichen Anzahl der Sekundärteilchen für diese Energie abweicht, kann durchaus nicht einfach vernachlässigt werden. Die oft gehörte Be-

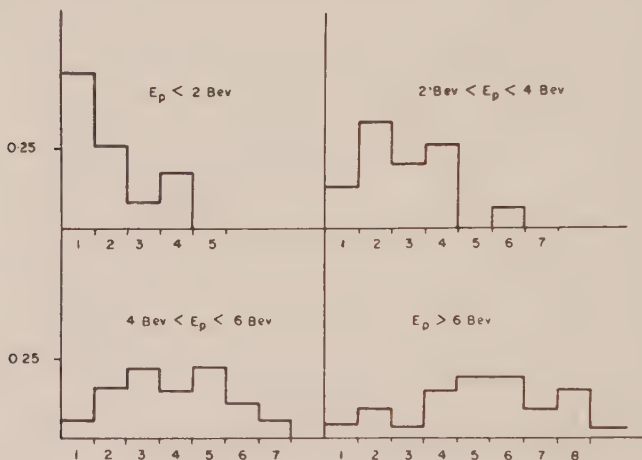


Abb. 4. Die Multiplizitätsverteilung der Sekundärteilchen von Schauern in Blei für verschiedene Primärenergien.

hauptung: Wenn die „P-Anordnung“ Schauer mit Multiplizität n auswählt, so werden praktisch alle Schauer, die im Absorber Σ erzeugt werden, höhere Multiplizitäten als n haben, ist daher nicht so allgemein gültig, wie man angenommen hatte. Es liegt dann nahe, die Ursache der Diskrepanzen in dem Versagen der Versuchsanordnungen zu suchen, die nicht mit genügender Sicherheit alle vorausgegangenen Zusammenstöße aufzeigen.

Nebekammern sind in dieser Hinsicht ziemlich verlässlich. Eine Anordnung von der Art, wie sie in Abb. 2 dargestellt ist, wird nur in einem einzigen Falle versagen und ein Ereignis in der Kammer „übersehen“: Wenn in einem Zusammenstoß des einfallenden geladenen Teilchens mit einem Neutron Ladungsaustausch stattfindet, und gleichzeitig eine so geringe Energieübertragung, daß außer dem „Stern“ langsamer Kernteilchen nur das einfallende Nukleon als energiereiches „Sekundärteilchen“ beobachtet werden kann. Solche Ereignisse ohne Ladungsaustausch haben wir in Abb. 4 als „Schauer mit Multiplizität 1“

angeführt; wir werden im folgenden kurz von „Ein-Teilchen-Schauern“ sprechen.

Da derartige Schauer für Primärteilchen zwischen 1×10^9 ev und 2×10^9 ev relativ häufig sind, könnte der Unterschied zwischen dem geometrischen Wert von 165 g/cm^2 und der Stoßlänge von 190 g/cm^2 , die wir für diesen Energiebereich gefunden haben, möglicherweise auf Zusammenstöße mit Ladungsaustausch zurückzuführen sein. Auf jeden Fall kann man eine obere Schranke für die Häufigkeit dieser Prozesse herleiten, wenn man annimmt, daß der gesamte Wirkungsquerschnitt auch in diesem Energiebereich geometrisch ist, und die beobachtete Abweichung auf dem Versagen der Auslöseanordnung beruht, Ladungsaustauschprozesse aufzuzeigen. Man findet dann,

daß eine Wahrscheinlichkeit von $\begin{pmatrix} 0,23 & +0,17 \\ & -0,12 \end{pmatrix}$ für Ladungsaustausch per „Ein-Teilchen-Schauer“ erforderlich ist (im Hinblick auf die experimentellen Unsicherheiten wollen wir im folgenden den Wert $(0,25 \pm 0,15)$ verwenden).

Offenbar sind daher Ladungsaustauschprozesse für Zusammenstöße sehr energiereicher Primärteilchen nicht leicht beobachtbar. Obwohl ihre Wahrscheinlichkeit unverändert bleiben mag, ist die Häufigkeit der Schauer, in denen *ausschließlich* Ladungsaustausch stattfindet, gering in dem Maße, in dem „Ein-Teilchen-Schauer“ selten werden. In allen anderen Zusammenstößen kann man in der Nebelkammer Ladungsaustausch nicht sicherstellen. — Die Seltenheit dieser Prozesse erklärt daher, daß für höhere Energien stets die geometrische mittlere Stoßlänge von 165 g/cm^2 gemessen wurde.

Frühere Versuche, Ladungsaustausch direkt zu beobachten, haben gewöhnlich ein negatives Ergebnis gehabt. Die verlässlichsten Beobachtungen sind wahrscheinlich die von GREGORY und TINLOT¹². Ohne absolute Werte für die Wahrscheinlichkeiten angeben zu können, bezeichnen diese Autoren Ladungsaustausch (mit etwa 400 Mev Anregungsenergie der Kerne) als verhältnismäßig häufig für niedrige Primärenergien, und sehr selten für Energien von mehreren 10^9 ev. Ihre Beobachtungen stimmen daher durchaus mit unseren Abschätzungen überein, und die oben angegebene obere Schranke für die Austauschwahrscheinlichkeit erscheint gerechtfertigt.

Wir wollen nun versuchen, die in Abb. 1 skizzierte Zählrohrmethode und ihre Ergebnisse etwas näher kritisch zu analysieren. Die Häufigkeit R der registrierten Schauer einer bestimmten Type in einer gegebenen Anordnung kann geschrieben werden als

$$R = \int_E^{\infty} s(E') \cdot P(E) \cdot \Pi(E, n) \cdot \phi(n) \cdot dE',$$

wobei E' die Energie der auf Σ einfallenden, E die Energie der aus Σ austretenden Primärteilchen ist, $s(E)$ das differentielle Energie-

spektrum der Primärteilchen, $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit für einen schauererzeugenden Zusammenstoß zwischen A und B , $\Pi(E, n)$ die Multiplizitätsverteilung in diesem Zusammenstoß, und $p(n)$ die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis, die geforderte Koinzidenz auszulösen. Im folgenden wollen wir die Einfallenergie E' durch E ersetzen: für die meisten „Ein-Teilchen-Schauer“ ist der Energieverlust ($E' - E$) in Σ hinreichend klein im Vergleich zur Energie E , so daß das Spektrum $s(E)$ auch für die einfallenden Teilchen benützt werden kann.

$P(E)$ hängt nur von der mittleren Stoßlänge der schauererzeugenden Teilchen und der Absorberdicke zwischen A und B ab; für eine gegebene Apparatur ist es eine Konstante, wenn die Stoßlänge λ energieunabhängig ist. $s(E)$ ist experimentell bestimmt worden (z. B. MYLROI und WILSON¹⁸; FROELICH et al.¹⁶), $\Pi(E, n)$ kann aus den Daten von Abb. 4 entnommen werden, und $p(n)$ kann für eine gegebene Anordnung direkt ermittelt werden. Wir wollen die Abschätzungen für das Experiment von BOEHMER und BRIDGE¹⁰ wiedergeben, in dem die Absorberdicke zwischen den Zählrohrgruppen von P nicht so groß war, daß Übergangseffekte eine wesentliche Rolle spielen*. Im Nachstehenden werden nur die Daten mit Bleiabsorber Σ benützt werden, da wir nur für dieses Material Daten über die Multiplizitätsverteilung haben.

BOEHMER und BRIDGE beobachteten Schauer, die von energiereichen Neutronen in einer Bleischicht von etwa 120 g/cm^2 zwischen A und B (Abb. 1) erzeugt wurden, so daß von m Teilchen, die in B registrieren, zumindest n die Gruppe C erreichen („Ereignisse P_{mn} “). Kombinationen $m = 2,3$ und $n = 1,2$ wurden gezählt, mit einem Absorber von 71 g/cm^2 Pb und $8,7 \text{ g/cm}^2$ Fe zwischen B und C .

Insbesondere für die Ereignisse P_{21} wird man Beiträge auch von Primärteilchen unter $1 \times 10^9 \text{ ev}$ vermuten, für die das in § II beschriebene Experiment keine Daten liefert. Es war daher notwendig, diese durch die Beobachtungen von CAMERINI et al.¹⁷ zu ergänzen. Dies ist glücklicherweise ohne schwerwiegenden Fehler möglich, da die Verteilungskurven in Blei und in Emulsionen (Ag und Br) nicht sehr verschieden sind.

In Tab. 1 sind daher die Werte für das differentielle Energiespektrum $s(E)$ und für die relativen Häufigkeiten $\Pi(E, n)$ von Schauern mit 1—4 Sekundärteilchen zusammengefaßt. Für Energien über $1 \times 10^9 \text{ ev}$ wurden die Daten von Abb. 4 benützt, für die niedrigsten Energien die Daten der BRISTOL-Gruppe¹⁷.

¹⁸ M. G. MYLROI und J. G. WILSON, Proc. Phys. Soc. (A) **64**, 404 (1951).

* Es sind diese Effekte, die Entwicklung einer Nukleonenkaskade in dem Absorbermaterial von P , die eine quantitative Analyse der meisten Anordnungen praktisch unmöglich machen. — Es ist im folgenden angenommen worden, daß die Multiplizitätsverteilung der Sekundärteilchen in von Protonen und von Neutronen erzeugten Schauern die gleiche ist.

Tabelle 1. Differentielles Energiespektrum $s(E_p)$ und Multiplizitätsverteilung $\pi(E_p, n)$ für verschiedene Primärenergien E_p .

$E_p (\times 10^9 \text{ ev})$	0,75—1	1—2	2—4	4—6	> 6
$s(E_p)$	0,29	0,44	0,16	0,06	0,05
$\Pi(E_p, 1)$	0,68	0,50	0,15	0,06	0,03
$\Pi(E_p, 2)$	0,26	0,25	0,30	0,16	0,07
$\Pi(E_p, 3)$	0,06	0,15	0,25	0,20	0,10
$\Pi(E_p, 4)$	—	0,10	0,20	0,21	0,15
$\Pi(E_p, \geq 5)$	—	—	0,10	0,37	0,65

Die durch die Geometrie der Apparatur bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(n)$ sind für die Anordnung von BOEHMER und BRIDGE, in der die 2,5 cm-Zählrohre durch Bleiplatten von 1,9 cm Dicke getrennt waren, leicht abgeschätzt. Zusammen mit den Werten von Tab. 1 erhält man dann für die relativen Beiträge der Primärteilchen verschiedener Energie zu den Ereignissen P_{mn} die in Tab. 2 wiedergegebenen Resultate. (Die Werte $R(E_p)$ sind in willkürlichen Einheiten angeführt.) Es sollte vielleicht darauf hingewiesen werden, daß die verhältnismäßig großen Beiträge der energiereichen Primärteilchen zu den „einfachen“ Schauern P_{21} und P_{22} größtenteils von Zusammenstößen mit wesentlich größeren Multiplizitäten als $n = 2$ herrühren. Für solche Schauer ist die Wahrscheinlichkeit p , zumindest zwei Zählrohre in B auszulösen, natürlich relativ groß.

Tabelle 2. Beiträge $R(E_p)$ der Primärteilchen mit Energie E_p zu den Ereignissen P_{mn} .

$E_p (\times 10^9 \text{ ev})$	0,75—1	1—2	2—4	4—6	> 6
$R(E_p) \begin{cases} P_{21} \\ P_{22} \\ P_{31} \\ P_{32} \end{cases}$	$\begin{cases} 0,13 \\ 0,05 \\ 0,02 \\ — \end{cases}$	$\begin{cases} 0,37 \\ 0,29 \\ 0,27 \\ 0,08 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,26 \\ 0,27 \\ 0,28 \\ 0,26 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,13 \\ 0,20 \\ 0,20 \\ 0,30 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,11 \\ 0,19 \\ 0,23 \\ 0,36 \end{cases}$

Auf Grund der Daten in den beiden Tabellen ist es nun möglich, die relative Häufigkeit der Zusammenstöße in Σ zu bestimmen, die von der Zählrohrguppe B nicht eliminiert werden („übersehene Schauer“). Dazu gehören alle „Ein-Teilchen-Schauer“ und diejenigen „Zwei-Teilchen-Schauer“, in denen ein verhältnismäßig langsames Sekundärteilchen emittiert wurde, dessen Reichweite geringer als die Absorberdicke zwischen dem Schauerursprung und B ist. Da der Versuch mit Absorbern Σ zwischen 33 und 290 g/cm² durchgeführt wurde, sollten individuelle Korrekturen für jede Absorberdicke angebracht werden. Man überzeugt sich aber leicht an Hand des empirischen Absorptionsgesetzes für die Sekundärteilchen¹⁶, daß die Unterschiede nicht von Bedeutung sind. Es wurde daher ein Wert von 35 g/cm²

als repräsentative Dicke gewählt, demzufolge 25% der „Zwei-Teilchen-Schauer“ zu den übersehenen Ereignissen zählen. Mit diesen Annahmen ist der Effekt zweifellos nicht überschätzt.

Offenbar führen die in Σ übersehenen Schauer zu einer Verfälschung der Versuchsergebnisse in dem Sinne, daß die in der üblichen Weise berechneten mittleren Stoßlängen zu groß sind. Wir wollen nun für das Experiment von BOEHMER und BRIDGE diese „scheinbaren Stoßlängen“ unter der Annahme des geometrischen Wertes von 165 g/cm^2 für die wahre mittlere Stoßlänge herleiten. Die Ergebnisse der elementaren Rechnung sind in Tab. 3 zusammengefaßt. Insbesondere für die komplizierteren Ereignisse muß wieder der Absorption der Sekundärteilchen Rechnung getragen werden, und die genauen Zuordnungen sind nicht mehr so eindeutig klar wie für die einfachsten Schauer. Die Methode ermöglicht aber eine einfache Prüfung der Verlässlichkeit: Außer den scheinbaren Stoßlängen kann man auch die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Ereignisse berechnen, und mit den experimentellen Raten vergleichen. Man findet z. B. für die Ereignisse P_{21} , P_{22} und P_{31} ein Häufigkeitsverhältnis von $0,36 : 0,10 : 0,11$, während die experimentellen Häufigkeiten, in gleicher Ordnung, $(8,29 \pm 0,27)$, $(2,27 \pm 0,14)$ und $(2,25 \pm 0,14)$ sind.

Tabelle 3. Beobachtete mittlere Stoßlängen Λ_{exp} und berechnete „scheinbare Stoßlängen“ Λ' für verschiedene Schauertypen.

Schauer	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}
$\Lambda_{exp} (\text{g/cm}^2)$	311 ± 34	220 ± 35	218 ± 34	143 ± 30
$\Lambda' (\text{g/cm}^2)$	270	240	224	165

Die geringe Differenz zwischen dem berechneten Wert von 270 g/cm^2 und dem beobachteten von $(311 \pm 34) \text{ g/cm}^2$ für die Ereignisse P_{21} ist kaum von Bedeutung. Zudem haben wir zwei Effekte vernachlässigt, die, obwohl beide gering, in systematischer Weise zu einer weiteren Erhöhung der gemessenen Stoßlängen beitragen. Der erste ist Ladungsaustausch, ein Prozeß, der zufolge des Protonenüberschusses in der einfallenden N -Komponente zusätzliche Neutronen produziert. Der zweite beruht auf dem Einfluß der „grauen“ Sekundärteilchen, die in den Verteilungskurven von Abb. 4 nicht einbezogen sind, aber für nicht allzu hohe Primärenergien einen merklichen Beitrag liefern können.

Die numerische Übereinstimmung zwischen den experimentellen und den berechneten Werten von Tab. 3 ist befriedigend, wenn sie auch nicht überschätzt werden sollte. Einzelheiten in unserer Interpretation mögen wohl unzureichend sein, aber das eine wesentliche

Resultat kann kaum angezweifelt werden: Die Zunahme der mittleren Stoßlängen mit abnehmender Primärenergie, die als Schlußfolgerung der Zählrohrmessungen bisher allgemein anerkannt wurde, kann ganz oder zumindest teilweise auf die grundsätzliche Unzulänglichkeit der experimentellen Methode zurückgeführt werden. Wenn man eine Wahrscheinlichkeit von $(25 \pm 15)\%$ für Ladungsaustausch in Proton-Neutron-Zusammenstößen zuläßt, sind alle experimentellen Befunde mit der Annahme eines geometrischen (oder nahezu geometrischen) Wirkungsquerschnittes für die Zusammenstöße von Primärteilchen aller Energien über etwa $0,75 \times 10^9$ ev verträglich.

Leider liegen Daten über die Multiplizitätsverteilung der Sekundärteilchen von Schauern in Kohlenstoff nicht vor, so daß eine quantitative Analyse der „scheinbaren Stoßlängen“ für dieses Element nicht möglich ist. Qualitativ läßt sich aber folgendes aussagen: Da in Zusammenstößen mit C-Kernen im allgemeinen weniger und energiereichere Sekundärteilchen emittiert werden (z. B. LOVATI et al.¹³), sollten hier die Schwankungen größer und die „Ein-Teilchen-Schauer“ selbst für etwas höhere Primärenergien nicht so selten sein. Da sich nun diese Prozesse in der vergrößerten „scheinbaren Stoßlänge“ äußern, wird man erwarten, daß die Experimente selbst in dem Energiebereich, in dem man in Blei bereits im wesentlichen die wahren Werte erhält, für Kohlenstoff noch unrichtige, zu hohe Stoßlängen ergeben. Ebenso wie die Abnahme der Stoßquerschnitte in Blei mit abnehmender Primärenergie ist demnach wahrscheinlich auch die „Transparenz“ der leichten Kerne ganz oder teilweise ein irrtümliches Ergebnis und beruht auf der Unzulänglichkeit der experimentellen Methoden. Versuche einer experimentellen Sicherstellung sind in Vorbereitung; es mag aber erwähnt werden, daß vor kurzem BROWN¹⁹ für sehr energiereiche Schauer in Kohlenstoff einen Wert von (65 ± 5) g/cm² gefunden hat: wesentlich weniger als die üblichen 80–85 g/cm². Es ist auch bemerkenswert, und durchaus in Einklang mit unserer Vorstellung, daß die für die verschiedenen Schauertypen gefundenen Stoßlängen gewöhnlich für C viel weniger variieren als für Pb. In dem oben diskutierten Experiment von BOEHMER und BRIDGE, zum Beispiel, werden für die einfachsten P_{21} -Schauer die Werte (108 ± 6) , bzw. (311 ± 34) angegeben, und für die härtesten P_{22} -Schauer (85 ± 12) , bzw. (143 ± 30) .

IV. Zusammenfassung.

Es wurde gezeigt, daß sich die Widersprüche zwischen Zählrohrversuchen und anderen Methoden zur Bestimmung der mittleren Stoßlängen energiereicher Primärteilchen auf die Unvollkommenheiten der üblichen experimentellen Methoden zurückführen lassen. Wenn allen notwendigen Korrekturen Rechnung getragen wird, erhält man das folgende Bild:

¹⁹ R. R. BROWN, Bull. Am. Phys. Soc. 26, Nr. 8, 25 (1951).

1. Der Stoßquerschnitt für Kernzusammenstöße in schweren Elementen ist geometrisch für alle Energien über 2×10^9 ev, und ändert sich auch nicht oder nicht wesentlich im Energiebereich zwischen $0,75 \times 10^9$ ev und 2×10^9 ev.

2. Die Wahrscheinlichkeit für Ladungsaustausch in Proton-Neutron-Zusammenstößen im Energiebereich der harten *N*-Komponente ist nicht größer als $(0,25 \pm 15)$. Falls dieser als obere Schranke hergeleitete Wert zu groß ist, muß man eine Abnahme der Stoßquerschnitte in ähnlichem Umfang für Primärenergien um 10^9 ev zulassen.

3. Die in leichten Materialien beobachtete „Transparenz“ der Kerne scheint gleichfalls auf die Unzulänglichkeit der experimentellen Methode zurückzuführen zu sein. Ob die Stoßquerschnitte hier wirklich den geometrischen Wert erreichen, oder ein wenig geringer sind, kann noch nicht mit Sicherheit gesagt werden; zweifellos aber scheint der „Transparenz“-Effekt bisher überschätzt worden zu sein.

Beitrag zum W.K.B.-Verfahren.

Von

P. Urban, Graz.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 10. Mai 1952.)

Zusammenfassung.

Zuerst wird, in Ergänzung zu dem bisher üblichen Verfahren, der strenge Nachweis erbracht, daß die ungeradzahligen Näherungen sich als totale Differentiale darstellen lassen, wodurch ihre Beiträge zur Quantenbedingung verschwinden. Dann wird an Hand der neueren mathematischen Arbeiten gezeigt, wie die asymptotischen Entwicklungen, unter Vermeidung des Stokesschen Phänomens, aufgestellt werden. Schließlich wird der ganze Fragenkomplex kritisch diskutiert.

§ 1. Die bisher übliche Methode.

Wir betrachten die SCHRÖDINGERSche Gleichung in einer Dimension

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0, \quad (1)$$

wobei $V(x)$ die potentielle Energie, E die gesamte Energie und h , sowie m die üblichen Konstanten bedeuten möge. Nun machen wir den Ansatz

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{h} \int \chi(x) dx \right\}, \quad (2)$$

wodurch die neue Funktion $\chi(x)$ eingeführt wird. Man erhält dann, unter Benützung von

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{2\pi i}{h} \chi \cdot \psi; \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2\pi i}{h} \psi \frac{d\chi}{dx} + \left(\frac{2\pi i}{h} \chi \right)^2 \psi, \quad (3)$$

die RICCATISChe Differentialgleichung

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{d\chi}{dx} = 2m(E - V) - \chi^2. \quad (4)$$

Für $h = 0$ ergibt sich als nullte Näherung die Relation

$$\chi = \{2m(E - V)\}^{1/2} = \chi_0, \quad (5)$$

welche der klassischen Lösung des Problems entspricht. Das Verfahren besteht bekanntlich in der Annäherung an die klassische Behandlung, welche der Reihenentwicklung nach \hbar entspricht:

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^n \chi_n = \chi_0 + \frac{\hbar}{2\pi i} \chi_1 + \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \chi_2 + \dots \quad (6)$$

Es ergibt sich durch Einsetzen dieser Reihe in Gl. (4) folgendes System von Bestimmungsgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_0}{dx} &= -2\chi_0\chi_1; & \frac{d\chi_1}{dx} &= -\chi_1^2 - 2\chi_2\chi_0 \dots, \\ \frac{d\chi_{n-1}}{dx} &= - \sum_{m=0}^{\infty} \chi_{n-m}\chi_m. \end{aligned} \quad (7)$$

Da χ_0 aus Gl. (5) bekannt vorausgesetzt werden kann, erhält man sukzessive:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{\chi_0'}{2\chi_0} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln \chi_0) = \frac{V'}{4(E-V)}, \\ \chi_2 &= -\frac{\chi_1^2 + \chi_1'}{2\chi_0} = -\frac{5V'^2}{32(2m)^{1/2}(E-V)^{3/2}} - \frac{V''}{8(2m)^{1/2}(E-V)^{3/2}} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Wir wollen zur Vereinfachung $\chi_n = -z_n/2$, $m \rightarrow a$, $n \rightarrow v$ setzen, wodurch wir

$$2z'_{v-1} = \sum_{a=0}^v z_a z_{v-a} \quad (8)$$

erhalten.

Man erhält nunmehr

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{d}{dx} (\ln z_0), & z_2 &= \frac{2z_1' - z_1^2}{2z_0}, & z_3 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{z_2}{z_0} \right), \\ z_4 &= \frac{2z_3' - 2z_1z_3 - z_2^2}{2z_0}, & z_5 &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{z_4}{z_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{z_2}{z_0} \right)^2 \right\}, \\ z_7 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{z_6}{z_0} - \frac{z_4z_2}{z_0^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{z_2}{z_0} \right)^3 \right], & \dots & \text{etc.,} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wobei zu bemerken ist, daß jeweils die ungeraden Näherungen sich als Differentialquotienten darstellen lassen. Verallgemeinern wir, so bekommen wir folgende Formel:

$$z_{2n+1} = \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot z_0^k} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=n} (z_{2m_1} z_{2m_2} \dots z_{2m_k}) \right\}, \quad (10)$$

die für $n \neq 0$ und $n = 1, 2, 3, \dots, (n \geq 1)$ gilt. In unseren χ 's lautet sie

$$-2 \chi_{2n+1} = \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot \chi_0^k} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=n} \chi_{2m_1} \chi_{2m_2} \dots \chi_{2m_k} \right\} \quad (10')$$

Wir wollen sie durch vollständige Induktion beweisen. (Schluß von n auf $n+1$.) Wir verwenden einen kleinen Kunstgriff. Setzt man $\nu \rightarrow 2n+1$ in Gl. (8), so geht dies über in

$$2z_{2n}' = \sum_{\alpha=0}^{2n+1} z_{\alpha} z_{2n+1-\alpha} = \overbrace{z_0 z_{2n+1} + z_1 z_{2n} + z_2 z_{2n-1} + \dots + z_{2n} z_1 + z_{2n+1} z_0},$$

wobei rechts eine geradzählige Anzahl von Gliedern auftritt, welche man paarweise geeignet zusammenfassen kann. Also wird

$$2z_{2n}' = 2 \sum_{\alpha=0}^n z_{\alpha} z_{2n+1-\alpha} \quad \text{oder} \quad z_{2n}' = \sum_{\alpha=0}^n z_{\alpha} z_{2n+1-\alpha}. \quad (11)$$

Faßt man darin wieder passend je zwei Glieder zusammen, so ergibt sich

$$z_{2n}' = \sum_{\mu=0}^n z_{2\mu} z_{2(n-\mu)+1} = z_0 z_{2n+1} + \sum_{\mu=1}^n z_{2\mu} z_{2(n-\mu)+1}, \quad (12)$$

wobei der Index des zweiten Faktors stets ungeradzahlig wird. Wir lösen diese Gleichung nach z_{2n+1} auf und erhalten

$$z_{2n+1} = \frac{z_{2n}' - \sum_{\mu=1}^n z_{2\mu} z_{2(n-\mu)+1}}{z_0} = \frac{z_{2n}' - z_1 z_{2n}}{z_0} - \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{z_{2\mu}}{z_0} z_{2(n-\mu)+1} = J_1 + J_2, \quad (13)$$

indem wir der Einfachheit halber

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{z_{2n}' - z_1 z_{2n}}{z_0} = \frac{z_{2n}' z_0 - z_0' z_{2n}}{z_0^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2n}}{z_0} \right), \\ -J_2 &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{z_{2\mu}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{n-\mu} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{m_1+\dots+m_k=n-\mu} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \right) \quad \text{oder} \\ J_2 &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{z_{2\mu}}{z_0} \frac{d}{dx} \left[\sum_{k=1}^{n-\mu} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{m_1+\dots+m_k=n-\mu} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

gesetzt haben. Hierbei kann man nun die Summe mit dem Differentialquotienten vertauschen, sowie die beiden Summen

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-\mu} a_{\mu k} \quad \text{in} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-k} a_{\mu k}$$

verwandeln. Man erhält dann

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k z_0} z_{2\mu} \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{m_1+\dots+m_k=n-\mu}^{n-k} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \right\}. \quad (15)$$

Man kann nun die Doppelsumme $\sum_{\mu=1}^{n-k} \sum_{m_1+\dots+m_k=n-\mu}^{n-k}$ in die einfache Summe $\sum_{m_1+\dots+m_k+\mu=n}^{n-k}$ zusammenziehen, da μ die Werte von 1 bis $n-k$ durchläuft. Wir setzen $\mu = m_{k+1}$ und erhalten, wenn wir noch die Zerlegung $\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$ verwenden, für J_2 zwei Terme

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)} \sum_{m_1+\dots+m_{k+1}=n} \frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)} \cdot \frac{1}{k} \sum_{m_1+\dots+m_{k+1}=n} \left(\frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right).$$

Im zweiten Gliede wenden wir die Regel für die Differentiation eines Produktes an und erhalten, wenn wir den Term $j = k$ separat anschreiben

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)} \frac{1}{k} \sum_{m_1+\dots+m_{k+1}=n} \frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} \frac{z_{2m_j}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_{j-1}}}{z_0} \cdot \frac{z_{2m_{j+1}}}{z_0} \dots \right. \\ \left. \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_j}}{z_0} \right) + \frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_{k-1}}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \right\}.$$

Führen wir die Summe für $j = 1, 2, \dots$ aus, so ergibt sich bei festgehaltenem m_{k+1}

$$\sum_{m_1+\dots+m_k=n-m_{k+1}} \left\{ \frac{z_{2m_2}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \right) + \frac{z_{2m_1}}{z_0} \frac{z_{2m_3}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_2}}{z_0} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_{k-1}}}{z_0} \right) + \frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_{k-1}}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \right\}. \quad (16)$$

Da man nun, wie bei Betrachtung der ersten beiden Glieder zu sehen ist, m_1 und m_2 vertauschen kann, ohne die Summe der Glieder zu ändern, weil ja alle m_1 bis m_k dieselbe Wertenföge durchlaufen, so sind alle k Summen einander gleich. Daher wird Gl. (16)

$$k \sum_{m_1 + \dots + m_k = n - m_{k+1}} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \right)$$

und wenn wir m_{k+1} auch variieren lassen und in die Summation einbeziehen,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-)^k}{(k+1)} \cdot \frac{1}{k} \cdot k \sum_{m_{k+1}=1}^{n-k} \frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \sum_{m_1 + \dots + m_k = n - m_{k+1}} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \right). \quad (17)$$

Jetzt vertauschen wir noch $1 \rightleftharpoons k+1$ und es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)} \sum_{m_1 + \dots + m_{k+1} = n} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \right). \quad (18)$$

Daher wird schließlich

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{m_1 + \dots + m_{k+1} = n} \frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{m_1 + \dots + m_{k+1} = n} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \sum_{m_1 + \dots + m_{k+1} = n} \frac{d}{dx} \left[\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_{k+1}}}{z_0} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Nun ersetzen wir wieder $k \rightleftharpoons k-1$ und bekommen

$$\begin{aligned} z_{2n+1} &= J_1 + J_2 = \frac{d}{dx} \left(\sum_{m_1=n} \frac{z_{2m_1}}{z_0} \right) + \\ &+ \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{m_1 + \dots + m_k = n} \frac{d}{dx} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{m_1 + \dots + m_k = n} \left(\frac{z_{2m_1}}{z_0} \dots \frac{z_{2m_k}}{z_0} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

für $n \geq 1$, qu. e. d.

§ 2. Die Quantenbedingungen.

Wir ersetzen unsere Variable x nunmehr durch eine komplexe z und setzen $V(z)$ als analytische Funktion voraus. Dann sei $\psi(z)$ analytisch. Ferner nehmen wir ein diskretes Spektrum als gegeben an, wobei $E = E_n$ der $(n+1)$ -te Eigenwert sei. Die zugehörige Eigenfunktion $\psi_n(z)$ habe n reelle Wurzeln. Wenn C eine geschlossene Kurve bedeutet, welche diese Wurzeln umfaßt, so gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi_n'(z) dz}{\psi_n(z)} = \frac{1}{h} \oint_C \chi(z) dz = \\ &= \frac{1}{h} \oint_C \chi_0(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \chi_1(z) dz - \frac{h}{4\pi^2} \oint_C \chi_2(z) dz + \dots \quad (20) \end{aligned}$$

Sind $z = a$ und $z = b$ einfache Nullstellen der Funktion $V(z) - E$, so hat $\chi_1(z)$ in diesen Punkten das Residuum $-1/4$, daher gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \chi_1(z) dz = -\frac{1}{2}, \quad (21)$$

während alle $\oint_C \chi_{2n+1}(z) dz$ $n \geq 1$ keine Beiträge liefern. Es ergibt sich daher aus Gl. (20)

$$n = \frac{1}{h} \oint_C \chi_0 dz - \frac{1}{2} - \frac{h}{4\pi^2} \oint_C \chi_2(z) dz + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{2n-1}}{(2\pi i)^{2n}} \oint_C \chi_{2n}(z) dz. \quad (22)$$

Durch partielle Integration findet man aus

$$\oint_C \frac{V''(z) dz}{\{E - V(z)\}^{3/2}} = \frac{3}{2} \oint_C \frac{V'^2(z) dz}{\{E - V(z)\}^{5/2}}. \quad (23)$$

Daher erhält man schließlich die Formel

$$\oint_C \chi_2(z) dz = \frac{1}{32} \frac{1}{2m} \oint_C \frac{V'^2 dz}{\{E - V\}^{5/2}}$$

und

$$\begin{aligned} n + \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{2m}}{h} \oint_C \{E - V\}^{1/2} dz - \frac{h}{128\pi^2 \sqrt{2m}} \oint_C \frac{V'^2 dz}{(E - V)^{5/2}} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{2n-1}}{(2\pi i)^{2n}} \oint_C \chi_{2n}(z) dz. \quad (24) \end{aligned}$$

Nun war die alte Quantenbedingung (BOHR-SOMMERFELD)

$$\oint_C \chi_0(z) dz = n h. \quad (25)$$

Wir sehen also, daß in unserer Ableitung dieser Spezialfall für die nullte Näherung enthalten ist. Unser Nachweis zeigt, daß in der Entwicklung nur die geradzahligen Glieder Beiträge liefern, während alle ungeradzahligen bis auf die erste, wegfallen. Am einfachsten schreiben wir die Beziehung in der Form

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) h \oint \chi_0(z) dz - \frac{h}{4\pi^2} \oint \chi_2(z) dz + \dots = \\ = \sqrt{2m} \oint \sqrt{E - V} dz - \frac{h^2}{128\pi^2} \sqrt{2m} \oint \frac{V'^2 dz}{(E - V)^{3/2}} + \dots \quad (26)$$

§ 3. Bestimmung einer asymptotischen Lösung im Anschluß an die Besselsche Differentialgleichung.

Wir gehen wieder von der Gl. (1) aus und setzen zur Abkürzung:

$$p^2 = 2m(E - V); \quad \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) = \Lambda^2 p^2. \quad (27)$$

Dann ergibt sich die Form

$$\psi'' + \Lambda^2 p^2 \psi = 0. \quad (27a)$$

Zuerst substituieren wir

$$\psi = Y(z) p^{-1/2}, \quad (28)$$

woraus folgt

$$Y'' - Y' \frac{p'}{p} + Y \left[p^2 \Lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{p''}{p} + \frac{3}{4} \frac{p'^2}{p^2} \right] = 0. \quad (29)$$

Nun führen wir eine Transformation beider Variablen durch:

$$\left. \begin{aligned} t &= \int_a^z p(z) dz, & \frac{dt}{dz} &= p(z) \\ Y &= t^{1/2} u(t), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY}{dz} &= Y' = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \dot{Y} p, \\ \frac{d^2 Y}{dz^2} &= Y'' = \ddot{Y} p^2 + \dot{Y} p' \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

gilt. Man erhält dann

$$\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{t} + u \left[\Lambda^2 - \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2} \frac{p''}{p^3} + \frac{3}{4} \frac{p'^2}{p^4} \right] = 0. \quad (31)$$

Bis zu dieser Stelle konnte man allgemein rechnen. Der Zweck der Transformation war, eine möglichst starke Anpassung an die BESSEL-Gleichung zu erreichen, welche bekanntlich durch

$$y'' + \frac{y'}{t} + y \left[\Lambda^2 - \frac{p^2}{t^2} \right] = 0 \quad (32)$$

definiert ist. Wir fassen diese als eine Art nullte Näherung auf, an welche sich dann die Störungsrechnung anschließt. Allgemein wäre nun

$$v = \pm 1/2, \quad u = J_{\pm 1/2}(\Lambda t) \quad \text{und} \quad Y = t^{1/2} J_{\pm 1/2}(\Lambda t), \quad (33)$$

daher

$$\psi = t^{1/2} J_{\pm 1/2}(\Lambda t) p^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\int_a^z p(z) dz \right]^{1/2} J_{\pm 1/2} \left(\Lambda \int_a^z p(z) dz \right) \quad (34)$$

als Ausgangspunkt zu nehmen. Diese BESSEL-Funktionen von halbzahligem Index sind jedoch nicht sehr bequem. Nimmt man dagegen an, daß p^2 eine einfache Nullstelle besitzt (wie in § 1), etwa in $z = a$, also

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= (z-a) + \dots, \quad \text{daher} \quad p = (z-a)^{1/2}, \quad p' = \frac{1}{2}(z-a)^{-1/2}, \\ p'' &= -\frac{1}{4}(z-a)^{-3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} t &= \int_a^z (z-a)^{1/2} dz = \frac{2}{3}(z-a)^{3/2}, \quad t^2 = \frac{4}{9}(z-a)^3, \\ \frac{p'^2}{p^4} &= \frac{1}{9t^2}, \quad \frac{p''}{p^3} = \frac{-1}{9t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

also

$$\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{t} + u \left[\Lambda^2 - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{18t^2} + \frac{3}{36t^2} \right] = 0 \quad (37)$$

oder Gl. (32) mit $\nu^2 = 1/9$, daher $\nu = \pm 1/3$, als Ausgangspunkt für unser Verfahren. Wir finden dann

$$u = J_{\pm 1/3}(\Lambda t), \quad Y = t^{1/3} J_{\pm 1/3}(\Lambda t) \quad (38)$$

und schließlich

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\int_a^z p dz \right]^{1/2} \left\{ J_{1/3} \left(\Lambda \int_a^z p dz \right) + J_{-1/3} \left(\Lambda \int_a^z p dz \right) \right\}. \quad (39)$$

Im Falle asymptotischer Näherung erhalten wir für $z > a$, $p^2 > 0$:

$$\begin{aligned} \psi &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi p \Lambda}} \left\{ \cos \left(\Lambda t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\Lambda t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{6}{\pi p \Lambda}} \cos \left\{ \Lambda \int_a^z p dz - \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Nimmt man eine zweite Nullstelle in b an, so ergibt sich für den Bereich $z < b$, wenn man hier $p^2 < 0$ annimmt,

$$\psi \sim \sqrt{\frac{2}{\pi |p| \Lambda}} \cos \left[\Lambda \int_z^b |p| dz - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (41)$$

Damit nun im Gebiet $a < z < b$ beide Lösungen identisch werden, was gefordert werden muß, setzen wir

$$A \int_a^z p \, dz - \frac{\pi}{4} + A \int_z^b |p| \, dz - \frac{\pi}{4} = n \pi$$

und erhalten

$$A \int_a^b p \, dz = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (42)$$

In unserer früheren Bezeichnungsweise (s. § 1) war nun

$$\chi_0 = \sqrt{2m(E-V)} = p \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{\hbar} = \frac{2\pi}{h}$$

gesetzt worden, daher geht Gl. (42) in die Formel

$$\int_a^b p \, dz = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{h}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

über.

Für doppelten Hin- und Herlauf, also vollen Umlauf, erhält man abschließend

$$2 \int_a^b p \, dz = \oint p \, dz = \oint \chi_0 \cdot dz = h \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Wir haben also Übereinstimmung mit Formel (26) hergestellt, wenn dort nach dem nullten Gliede abgebrochen wird. Beide Methoden entsprechen sich daher genau und manchmal ist unsere letzte Methode der ersteren vorzuziehen, da sie schneller bessere Näherungen liefert. Andere Vorteile werden im nächsten Paragraphen besprochen werden.

§ 4. Diskussion.

Es sei allgemein eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben, und zwar in der Form

$$y''(x) + [\lambda^2 \varphi(x) + p(x)] \cdot y = 0. \quad (43)$$

Nun transformieren wir diese Gleichung auf die Normalform mittels

$$t = \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi(x)} \, dx, \quad \text{wobei} \quad \varphi(x) \geq 0 \quad (44)$$

sein kann. Außerdem führen wir eine neue abhängige Variable z durch

$$z = \sqrt[4]{\varphi(x)} \cdot y \quad (45)$$

ein.

Wir erhalten hierdurch

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left[\lambda^2 + \frac{5}{16} \frac{\varphi'^2}{\varphi^3} - \frac{1}{4} \frac{\varphi''}{\varphi^2} + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right] z = 0, \quad (46)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \frac{d\varphi}{dx}, & \varphi'' &= \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi'}{\varphi^{1/2}}, & \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

gesetzt wurde. Die Form ist nunmehr

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + [\mu^2 + r(t)] z(t) = 0 \quad (48)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 &= \lambda^2, \\ r(t) &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + \frac{3}{16} \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{1}{4} \frac{\varphi''}{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Ist nun $r(t)$ vernachlässigbar, so erhält man als angenäherte Lösung

$$z(t) = e^{\pm i\mu t}. \quad (50)$$

Hierauf setzt man eine asymptotische Entwicklung nach fallenden Potenzen von λ , respektive μ an. Dadurch ergibt sich in bekannter Weise die asymptotische Näherung, die aus trigonometrischen Funktionen und Potenzen von μ besteht (s. HORN):

$$z(t) = e^{\pm i\mu t} \left\{ 1 + \frac{c_1(t)}{\mu} + \frac{c_2(t)}{\mu^2} + \dots + \frac{c_n(t)}{\mu^n} \right\}. \quad (51)$$

Dieses Verfahren ist äquivalent mit dem in § 1 behandelten W.K.B.-Verfahren. Es unterscheidet sich von dem vorher erwähnten rein formal nur dadurch, daß man statt der Differentialgleichung zweiter Ordnung einfach die RICATTISCHE Differentialgleichung erster Ordnung behandelt, ist also mathematisch von dem bekannten POINCARÉ-HORNSCHEN Verfahren in keiner Weise verschieden.

Betrachten wir der Einfachheit halber nur die Nullte-Näherung, so lautet diese in den ursprünglichen Variablen

$$y(x) \cong \frac{1}{\sqrt[4]{\varphi(x)}} \exp \left\{ \pm i \int_{x_0}^x \lambda \sqrt{\varphi(x)} dx \right\}, \quad (52)$$

daher ist die allgemeine Lösung

$$y(x) \cong \frac{1}{\sqrt[4]{\varphi(x)}} \left\{ C_1 e^{i \int_{x_0}^x \lambda \sqrt{\varphi} dx} + C_2 e^{-i \int_{x_0}^x \lambda \sqrt{\varphi} dx} \right\}. \quad (53)$$

Die beiden auftretenden Fälle ergeben sich zu:

$$a) \quad \varphi(x) > 0, \quad y \cong \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \left\{ C_1 e^{i \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi} dx} + C_2 e^{-i \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi} dx} \right\}; \quad (54)$$

$$b) \quad \varphi(x) < 0, \quad y \cong \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \left\{ C_3 e^{i \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi} dx} + C_4 e^{-i \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi} dx} \right\}. \quad (55)$$

Beide Fälle sind formal gleich, die erste Gleichung zeigt trigonometrischen, die zweite exponentiellen Charakter; man sieht sofort, daß sie in der Umgebung der Nullstelle von $\varphi(x)$ jedoch *nicht* gelten werden. Außerdem kann man dies auch an der Restabschätzung sehen; das Außerachtlassen dieses Punktes führt in der Literatur zu mannigfachen Fehlern. Zur Illustration betrachten wir das bekannte Beispiel: Die Gleichung der BESSEL-Funktionen vom Argument $1/3$:

$$y' + \lambda^2 x y = 0. \quad (56)$$

Hier hat $\varphi(x) = x$ die einfache Nullstelle $x = 0$, der Entwicklungsbereich ist von $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$ erstreckt. Sie hat die expliziten Lösungen:

$$y_{\pm} = x^{1/2} J_{\pm 1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda x^{3/2} \right). \quad (57)$$

Das Studium dieser Gleichung enthält ein Minimum an Schwierigkeiten, bei maximaler Klarheit der Verhältnisse, was der Grund ist, daß diese Gleichung eine zentrale Stellung in der allgemeinen Theorie einnimmt. Ist η eine Konstante in bezug auf x , sonst aber auf den Bereich $-\pi/2 < \eta \leq \pi/2$ beschränkt, so lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung, bis auf einen konstanten Faktor:

$$y(x) = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/6} \lambda^{1/6} \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{3} \lambda x^{3/2} \right)^{1/3} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} - \eta \right) J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda x^{3/2} \right) + \right. \\ \left. + \cos \left(\frac{\pi}{3} + \eta \right) J_{1/3} \right\}. \quad (58)$$

x_0 ist hier der Ursprung. Die asymptotischen Entwicklungen von y ergeben sich zu

$$y(x) \cong \frac{1}{|x|^{1/4}} \left\{ \sin \eta e^{\frac{2}{3} \lambda |x|^{3/2}} + \frac{1}{2} \cos \eta e^{-\frac{2}{3} \lambda |x|^{3/2}} \right\} \quad \text{für } x < 0, \quad (59)$$

$$y(x) \cong \frac{1}{x^{1/4}} \cos \left(\frac{2}{3} \lambda x^{3/2} - \frac{\pi}{4} + \eta \right) \quad \text{für } x > 0. \quad (60)$$

Die Erscheinung, daß sich die beiden Koeffizienten C_1, C_2 beim stetigen Übergang zwischen den beiden Intervallen, die durch eine Nullstelle voneinander getrennt sind, sprunghaft ändern, ist das STOKESSche Phänomen. Sie wurde in der physikalischen Literatur neuerdings von

KRAMERS wiederentdeckt. Letzterer hat Vorschriften, orientiert am Beispiel der BESSEL-Funktionen, angegeben, wie man die Koeffizienten C_3, C_4 aus den C_1, C_2 zu bestimmen hat, damit die asymptotischen Entwicklungen zur selben Funktion gehören. Diese Vorschrift gilt aber nur, wenn eine einfache Nullstelle von $\varphi(x)$ vorhanden ist.

Vorschrift von KRAMERS: x_0 Umkehrpunkt

$$\begin{aligned}
 x < x_0, \quad y(x) &\cong \frac{1}{\sqrt{\varphi}} e^{-i\lambda \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi} dx} && \text{exponentiell, da } \varphi(x) \text{ negativ,} \\
 x > x_0, \quad y(x) &\cong \frac{2}{\sqrt{\varphi(x)}} \cos \left[\frac{\pi}{4} - \lambda \int_{x_0}^x \sqrt{\varphi} dx \right] && \text{oszillierend.}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Es wurde dabei angenommen, daß für $x > x_0$, $\varphi(x) > 0$ und für $x < x_0$, $\varphi(x) < 0$ gilt. x_0 ist die Nullstelle für $\varphi(x)$, es gilt also $\varphi(x_0) = 0$. Seine Begründung besteht einfach darin, daß diese Zuordnungen, die bei $J_{\pm 1/2}$ bekannt sind, auch bei jeder anderen Differentialgleichung

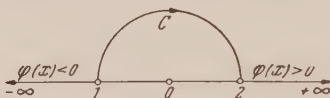


Abb. 1.

zweiter Ordnung dieselben sind. Später hat man sich in der physikalischen Literatur bemüht, vor allem von der Schule KRAMERS, diese Überlegungen genauer durchzuführen, ohne Rücksichtnahme auf die einschlägige mathematische Literatur. Vor allem wurde von ZWAAN in seiner Dissertation: „Über die Intensitäten im Ca-Funkenspektrum“, Utrecht, dieses Thema behandelt, aber auch seine Begründung ist nicht stichhältig, sondern sie liefert nur die Herleitung von C_3, C_4 aus C_1, C_2 , aber nicht das Umgekehrte. Seine Methode besteht kurz in Folgendem: Wir nehmen an, es sei nur eine Nullstelle vorhanden. Es gilt hierfür: im Punkte 1 ($x < 0$)

$$\varphi(x) = |\varphi(x)| e^{i\pi};$$

daher

$$\sqrt[4]{\varphi(x)} = \sqrt[4]{|\varphi(x)|} e^{i\pi/4},$$

dann wird angenommen, daß diese Entwicklung:

$$y(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} \left\{ C_3 e^{i\lambda \int_{x_0=0}^x \sqrt{\varphi(x)} dx} + C_4 e^{-i\lambda \int_0^x \sqrt{\varphi} dx} \right\} \tag{62}$$

auch im Komplexen gilt. ZWAAN unterdrückt also das STOKESSche Phänomen im Komplexen. Ferner nimmt er an, daß C_3 klein gegenüber C_4 sei. Dies ist auch bedenklich. Wir haben dann für $x < 0$

$$y(x) \cong \frac{C_4}{\sqrt{\varphi(x)}} e^{-i\lambda \int_0^x \sqrt{\varphi(x)} dx}; \quad \varphi(x) < 0, \quad (63)$$

daher reell.

Da y reell sein soll, muß $\arg y(x) = 0$ sein. Nun ist das Argument von $[\varphi(x)]^{-1/4} = -\pi/4$, daher $\arg C_4 = \pi/4$, das heißt aber $C_4 = |C_4| \cdot e^{i\pi/4}$. Daher gilt

$$y(x) \cong \frac{|C_4|}{\sqrt{\varphi(x)}} e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \lambda \int \sqrt{\varphi(x)} dx\right]}, \quad \text{für } x < 0. \quad (64)$$

Nun bewegen wir uns auf C in Pfeilrichtung nach 2. Dann setzt man an:

$$y(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} \left\{ |C_4| e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \lambda \int \sqrt{\varphi(x)} dx\right]} + C_3 e^{i\lambda \int \sqrt{\varphi(x)} dx} \right\} \quad (65)$$

mit

$$C_3 = |C_3| e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (65a)$$

In 2 ist nun $\varphi(x) > 0$; da $y(x)$ wieder reell sein muß, so gilt

$$C_3 e^{i\lambda \int \sqrt{\varphi} dx} = |C_4| e^{-i\left[\frac{\pi}{4} - \lambda \int \sqrt{\varphi} dx\right]} \quad \text{oder} \\ C_3 = |C_4| e^{-i\frac{\pi}{4}} = \bar{C}_4. \quad (66)$$

Daher gilt für $x < 0$

$$\frac{C_1}{\sqrt{\varphi(x)}} \cdot e^{-i\lambda \int_0^x \sqrt{\varphi(x)} dx} \rightarrow \text{geht über in } \frac{2|C_4|}{\sqrt{\varphi(x)}} \cos \left[\frac{\pi}{4} - \lambda \int_0^x \sqrt{\varphi(x)} dx \right]$$

für $x > 0$. Die richtige Zuordnungsvorschrift lautet daher:

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} e^{-i\lambda \int_0^x \sqrt{\varphi(x)} dx} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\varphi(x)}} \cos \left[\frac{\pi}{4} - \lambda \int_0^x \sqrt{\varphi(x)} dx \right]. \quad (67)$$

Dieser Gedankengang wurde wahrscheinlich durch die Umlaufrelationen bei den BESSEL-Funktionen nahegelegt. Trotzdem ist dieses Verfahren von ZWAAN in keiner Weise einwandfrei.

Die Behandlung läßt sich aber leicht streng durchführen, wenn man folgende Überlegung anstellt: Betrachten wir irgendeine von der BESSELSchen verschiedene Differentialgleichung; dann besteht die

asymptotische Entwicklung einfach darin, daß man die Lösung durch trigonometrische Funktionen approximiert: dabei tritt allgemein das STOKESSche Phänomen auf. Die BESSELSche Differentialgleichung zeigt aber ebenfalls das STOKESSche Phänomen. Es liegt nun nahe, die Lösungen der Differentialgleichung nicht durch trigonometrische, sondern durch BESSELSche Funktionen zu approximieren und dann in dieser asymptotischen Entwicklung nach BESSEL-Funktionen die bekannten asymptotischen Reihen der BESSEL-Funktionen einzusetzen. Diese Entwicklungen nach BESSEL-Funktionen wird im allgemeinen kein STOKESSches Phänomen mehr zeigen; man kann dann dies als eine Art Uniformisierung bezeichnen. Mathematisch exakt wurde dies von R. E. LANGER und E. HLAWKA durchgeführt. Für Kugelfunktionen wurde dies zum ersten Male von E. HILB gezeigt, für die LAGUERRE-Polynome und -Funktionen von HLAWKA. Dieses Verfahren geht über das KRAMERSsche insoferne weit hinaus, als es nicht allein anwendbar ist, wenn $\varphi(x)$ nur *eine* einfache Nullstelle besitzt, sondern auch bei mehrfachen Nullstellen. Außerdem gilt diese asymptotische Entwicklung auch in der Nähe der Nullstelle, woselbst die Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen überhaupt nicht möglich ist; dies zeigt besonders den großen Wirkungsbereich des neuen, exakten Verfahrens.

Literatur.

1. HLAWKA, Monatshefte f. Mathematik und Physik, **42**, 275.
2. HLAWKA, Monatshefte f. Mathematik und Physik **46**, 34.
3. R. E. LANGER, Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 545 (1934).
4. E. C. TITCHMARSH, Eigenfunction Expansions etc. Oxford 1946.

Bericht über die neuere Entwicklung der Quantenelektrodynamik. III.

Von

Kurt Baumann, Wien.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 18. Mai 1952.)

6. Wirkungsquerschnitte.

Die physikalischen Aussagen der S-Matrixtheorie liefern die Ausdrücke

$$\begin{aligned} |(\Phi_b, S \Phi_a)|^2 &= (\Phi_a, S^+ \Phi_b) (\Phi_b, S \Phi_a) \\ &= \left(\Phi_a, \Sigma ((i/\hbar c)^m / m!) \int T^* H_1(x_1) \dots H_1(x_m) d\omega_1 \dots d\omega_m \Phi_b \right) \times \\ &\times \left(\Phi_b, \Sigma ((-i/\hbar c)^n / n!) \int T H_1(x_1) \dots H_1(x_n) d\omega_1 \dots d\omega_n \Phi_a \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Die S-Matrixelemente sind also zu multiplizieren mit jenen für den inversen Prozeß, wobei noch $-i D_+$, $i S_+$ durch $i D_-$, $-i S_-$ zu ersetzen sind.

Für den totalen Wirkungsquerschnitt ist über alle möglichen Endzustände zu summieren und durch die einfallende Stromdichte zu dividieren. Es sind also Summen $\Sigma \psi_k(x) \bar{\psi}_k(x')$ über alle Wellenfunktionen freier Elektronen oder Positronen, oder $\Sigma A_k(x) A_k(x')$ zu bilden; diese sind nichts anderes als die Vakuum Erwartungswerte

$$\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') \rangle_0 = -i S_{\alpha\beta}^{(+)}(x - x'), \quad (6.2 a)$$

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x') \rangle_0 = -i S_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'), \quad (6.2 b)$$

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle_0 = i \hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(+)}(x - x'), \quad (6.3)$$

$$i D^{(+)}(x) = (2\pi)^{-3} \int_{k_0 > 0} e^{ikx} \delta(k^2) d_4 k, \quad (6.4 a)$$

$$-i S^{(\pm)}(x) = (2\pi)^{-3} \int_{-k_0 \leq 0} e^{ikx} \delta(k^2 + \kappa^2) (k + \kappa) d_4 k. \quad (6.4 b)$$

Verwenden wir nun

$$\delta(f(x)) = \sum_i |f'(x_i)|^{-1} \delta(x - x_i), \quad (6.5)$$

womit $\delta(k^2 + \kappa^2) = \delta(k_0 - \sqrt{k^2 + \kappa^2})/2k_0$; die Summe in Gl. (6.5) läuft über alle Nullstellen von f , aber im Integrationsgebiet $k_0 > 0$ liegt nur eine Nullstelle von $k^2 + \kappa^2$. Geht man noch zu einem endlichen Normierungsvolumen über:

$$(2\pi)^{-3} \int d_3 k \rightarrow V^{-1} \Sigma_{\mathbf{k}},$$

so erkennt man, daß die Summation über bloß einen Impuls $h k$ durch

$$\Sigma_{Spin} u_\alpha(x) \bar{u}_\beta(x') = e^{ik(x-x')} \frac{1}{2k_0} (\mathbf{k} + \kappa)_{\alpha\beta}^*, \quad (6.6)$$

$$\Sigma_{Polarisation} A_\mu(x) A_\nu(x') = \hbar c \delta_{\mu\nu} e^{ik(x-x')} \frac{1}{2k_0} \quad (6.7)$$

gegeben ist.

Ersetzt man in Gl. (6.3) und (6.7) $\delta_{\mu\nu}$ durch $e_\mu e_\nu$, so beschränkt man sich noch auf eine bestimmte Polarisationsrichtung — in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die Übergangsmatrixelemente von $A_\mu(x)$ die Form

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{2k_0}} e_\mu e^{ikx}, \quad e_\mu e_\mu = 1$$

haben.

Als typisches Beispiel betrachten wir den Stoß zweier freier Elektronen. Ehe wir damit beginnen, führen wir eine etwas vereinfachte Bezeichnungsweise ein, welche FEYNMAN verwendet und nach ihm viele andere Autoren, so daß die Vertrautheit mit ihr nützlich ist.



Abb. 1. Graph zweiter Ordnung zur MÖLLER-Streuung

FEYNMAN rechnet mit natürlichen Einheiten, in denen \hbar und c gleich eins sind. Diese Faktoren sind unnützer Ballast, nötigenfalls liefert eine Dimensionsbetrachtung zu jeder Größe sofort den unterdrückten Faktor $\hbar^r c^s$. Ferner verwendet FEYNMAN reelle Weltkoordinaten, benützt also $x_0 = t$ statt $x_4 = it$, führt aber ein $g_{\mu\nu}$ ein, das sich von dem üblichen um das Vorzeichen unterscheidet. Das Skalarprodukt wird dann

$$a b = a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (6.8)$$

Für den Energieimpulsvektor eines freien Elektrons ergibt sich damit $p^2 = p_\mu p^\mu = m^2$ statt bisher $p^2 = -m^2$. Allgemein erhält man irgendeine Formel in der neuen Gestalt aus der alten, indem man $\delta_{\mu\nu}$

* Mit dem üblichen Projektionsoperator $\beta(\mathbf{k} + \kappa)/2k_0$ käme ebenfalls z. B.

$$\Sigma_{Spin} \bar{u} O u = S p \beta O \beta (\mathbf{k} + \kappa)/2k_0 = S p O (\mathbf{k} + \kappa)/2k_0.$$

durch $-g_{\mu\nu}$ ersetzt und auch Skalarprodukte, welche ja ebenfalls den metrischen Fundamentaltensor enthalten, mit einem Minuszeichen versieht.

FEYNMANS $\gamma_\mu = (\beta, \beta \vec{\alpha})$ unterscheidet sich von dem üblichen um einen Faktor i . Somit ist etwa $\mathbf{a} = a_\mu \gamma^\mu$.

Wir interessieren uns nun für jene Terme der gemäß Kap. 4 zerlegten Streumatrix, die ein Übergangselement von zwei freien Elektronen $u e^{-ipx}$ und $v e^{-iqx}$ zur Zeit $t = -\infty$ zu zwei Elektronen $u' e^{-ip'x}$, $v' e^{-iq'x}$ zur Zeit $t = +\infty$ besitzen. In niedrigster Näherung kommt S_2 in Frage (Abb. 1):

$$\begin{aligned} \langle u' v' | S_2 | u v \rangle &= (-ie)^2 / 2! \int \langle u' v' | T : \bar{\psi} \mathbf{A} \psi(x) : : \bar{\psi} \mathbf{A} \psi(y) : | u v \rangle dx dy \\ &= -\frac{1}{2} e^2 \int \langle u' v' | : \bar{\psi} \mathbf{A} \cdot \psi(x) \bar{\psi} \mathbf{A} \cdot \psi(y) : | u v \rangle dx dy \\ &= -\frac{1}{2} e^2 \int i D_+(x-y) \langle u' v' | : \bar{\psi}^{(-)}(x) \gamma_\mu \psi^{(+)}(x) \bar{\psi}^{(-)}(y) \gamma^\mu \psi^{(+)}(y) : | u v \rangle dx dy \\ &= \frac{1}{2} e^2 \int i D_+(x-y) \langle u' v' | \bar{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\gamma(y) | 0 \rangle \langle 0 | \psi_\beta(x) \psi_\delta(y) | u v \rangle \cdot \\ &\quad \cdot (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} dx dy. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Nun ist

$$\langle 0 | \psi(x) \psi(y) | u v \rangle = u(x) v(y) - v(x) u(y), \quad (6.10)$$

wobei $u(x) = u e^{-ipx}$ usw. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \langle u' v' | S_2 | u v \rangle &= e^2 \int i D_+(x-y) [\bar{u}'(x) \gamma_\mu u(x) \bar{v}'(y) \gamma^\mu v(y) - \\ &\quad - \bar{v}'(x) \gamma_\mu u(x) \bar{u}'(y) \gamma^\mu v(y)] dx dy \\ &= i e^2 [D_+(p-p') \bar{u}' \gamma_\mu u \bar{v}' \gamma^\mu v - D_+(p-q') \bar{v}' \gamma_\mu u \bar{u}' \gamma^\mu v] \\ &\quad \cdot (2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q'). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Das Integral

$$(2\pi)^{-4} \int dk D_+(k) e^{-ik(x-y)}$$

kompensierte sich gegen die eine Koordinatenraumintegration, z. B. $(2\pi)^4 \delta(k+p-p')$. Gl. (6.11) ist nun mit dem komplex konjugierten Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle u v | S_2^\dagger | u' v' \rangle &= -i e^2 [D_-(p-p') \bar{u} \gamma_\nu u' \bar{v} \gamma^\nu v - \\ &\quad - D_-(p-q') \bar{u} \gamma_\nu v' \bar{v} \gamma^\nu u'] (2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q') \end{aligned} \quad (6.11')$$

zu multiplizieren und

$$\begin{aligned} u_\alpha' \bar{u}_{\beta'} &\rightarrow (2\pi)^{-3} \int_{p_0' > 0} d^3 p' \delta(p'^2 - m^2) (\mathbf{p}' + m)_{\alpha\beta} \\ v_\alpha' \bar{v}_{\beta'} &\rightarrow (2\pi)^{-3} \int_{q_0' > 0} d^3 q' \delta(q'^2 - m^2) (\mathbf{q}' + m)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

zu ersetzen. Weiter schreiben wir

$$\begin{aligned} (2\pi)^8 [\delta(p+q-p'-q')]^2 &= (2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q') \int e^{i(p+q-p'-q')x} dx \\ &= (2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q') \int dx = (2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q') VT \end{aligned}$$

und streichen $\delta(p+q-p'-q')$ gegen die q' -Integration weg;

$$q' = p + q - p' \quad (6.12)$$

behalten wir als Abkürzung. Somit ergibt sich die Streuwahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit zu

$$\begin{aligned} w &= e^4 (2\pi)^{-2} \int_{p_0' > 0} d p' \delta(p'^2 - m^2) \delta(q'^2 - m^2) \\ &\cdot \{ (p-p')^{-4} \bar{u} \gamma_\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma_\mu u \bar{v} \gamma^\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma^\mu v \\ &+ (p-q')^{-4} \bar{u} \gamma_\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma_\mu u \bar{v} \gamma^\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma^\mu v \\ &- (p-p')^{-2} (p-q')^{-2} \bar{u} \gamma_\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma^\mu v \bar{v} \gamma^\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma_\mu u \\ &- (p-p')^{-2} (p-q')^{-2} \bar{u} \gamma_\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma^\mu v \bar{v} \gamma^\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma_\mu u \}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die Mittelung über die Spins besteht nach Gl. (6.6) in

$$u_\alpha \bar{u}_\beta \rightarrow (1/4 p_0) (\mathbf{p} + m)_{\alpha\beta}, \quad v_\alpha \bar{v}_\beta \rightarrow (1/4 q_0) (\mathbf{q} + m)_{\alpha\beta}.$$

Um zum totalen Wirkungsquerschnitt zu kommen, fügen wir noch die Geschwindigkeit $|\mathbf{p}|/p_0$ von u im Ruhssystem von v zu den Energienennern. Die drei Faktoren kann man invariant $16 \sqrt{(p q)^2 - p^2 q^2}$ schreiben — im Ruhssystem von v ist dies gleich $4 m 4 p_0 |\mathbf{p}|/p_0$. Es ist also

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^4}{16 \sqrt{(p q)^2 - p^2 q^2}} \int_{p_0' > 0} \frac{d p'}{(2\pi)^2} \delta(p'^2 - m^2) \delta(q'^2 - m^2) \\ &\{ (p-p')^{-4} \text{Sp}(\mathbf{p} + m) \gamma_\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma_\mu \text{Sp}(\mathbf{q} + m) \gamma^\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma^\mu \\ &+ (p-q')^{-4} \text{Sp}(\mathbf{p} + m) \gamma_\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma_\mu \text{Sp}(\mathbf{q} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma^\mu \\ &- (p-p')^{-2} (p-q')^{-2} \text{Sp}(\mathbf{p} + m) \gamma_\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma^\mu (\mathbf{q} + m) \gamma^\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma_\mu \\ &- (p-p')^{-2} (p-q')^{-2} \text{Sp}(\mathbf{p} + m) \gamma_\nu (\mathbf{q}' + m) \gamma^\mu (\mathbf{q} + m) \gamma^\nu (\mathbf{p}' + m) \gamma_\mu \}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die beiden letzten Spuren sind wegen der entgegengesetzt gleichen Faktorreihenfolge und Gln. (6.15), (6.16) identisch.

Gehen wir nun an die Auswertung der Spuren in Gl. (6.14). Sie seien mit $\text{Sp}_1, \dots, \text{Sp}_5$ bezeichnet. Die Diagonalsumme eines Produkts aus einer ungeraden Anzahl von γ -Faktoren verschwindet. Bei einer geraden Anzahl zieht man einen Faktor schrittweise von rechts nach links durch, unter Verwendung von

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu}, \quad \text{Sp}(A + B) = \text{Sp} A + \text{Sp} B, \quad \text{Sp} 1 = 4,$$

und setzt das Ergebnis mit dem ursprünglichen Ausdruck vermöge $\text{Sp } A B = \text{Sp } B A$ gleich. Man erhält so

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu}, \quad (6.15)$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varrho = g_{\lambda\mu} g_{\nu\varrho} - g_{\lambda\nu} g_{\mu\varrho} + g_{\lambda\varrho} g_{\mu\nu}. \quad (6.16)$$

Damit wird

$$\frac{1}{4} \text{Sp}_1 \frac{1}{4} \text{Sp}_2 = (\not{p}'_\mu \not{p}_\nu + \not{p}'_\nu \not{p}_\mu + g_{\mu\nu} (m^2 - \not{p} \not{p}')) \cdot (q'^\mu q^\nu + q'^\nu q^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - q q')).$$

Aus dem Erhaltungssatz Gl. (6.12) ergibt sich

$$\not{p} q = \not{p}' q', \quad \not{p} q' = q \not{p}', \quad \not{p} \not{p}' = q q', \quad (6.17)$$

wenn man abwechselnd je zwei Glieder auf jede Seite bringt und quadriert. Mit Gl. (6.17) und

$$\not{p} \not{p}' = \not{p} (\not{p} + q - q') = m^2 + \not{p} q - q \not{p}' \quad (6.18)$$

wird

$$\frac{1}{16} \text{Sp}_1 \text{Sp}_2 = 2 [(p q)^2 - 2 m^2 \not{p} q + (\not{p}' q)^2 + 2 m^2 \not{p}' q]. \quad (6.19)$$

Im nächsten Term hat man nur \not{p}' und q' zu vertauschen:

$$\frac{1}{16} \text{Sp}_3 \text{Sp}_4 = 2 [(p q)^2 - 2 m^2 \not{p} q + (\not{p} \not{p}')^2 + 2 m^2 \not{p} \not{p}']. \quad (6.19')$$

Die Ermittlung der letzten Spur verkürzen die Formeln

$$\begin{aligned} \gamma_\varrho \gamma_\lambda \gamma^\varrho &= -2 \gamma_\lambda, \\ \gamma_\varrho \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\varrho &= 4 g_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\varrho \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\varrho &= -2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Wir spalten nun Sp_5 auf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Sp } \not{p} \gamma_\nu \not{p}' \gamma_\mu \not{q} \gamma^\nu \not{q}' \gamma^\mu &= -2 \frac{1}{4} \text{Sp } \not{p} \not{q} \gamma_\mu \not{p}' \not{q}' \gamma^\mu \\ &= -8 \frac{1}{4} \text{Sp } \not{p} \not{q} (\not{p}' \not{q}') = -8 (p q)^2; \end{aligned}$$

die Terme proportional m^2 aus Sp_5 sind von der Gestalt

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \not{a} \gamma_\mu \not{b} \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 \frac{1}{4} \text{Sp } \not{a} \not{b} = 4 a b$$

oder

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \not{a} \gamma_\mu \gamma_\nu \not{b} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4 \frac{1}{4} \text{Sp } \not{a} \gamma_\mu \not{b}^\mu = 4 a b;$$

zuletzt haben wir einen Term proportional m^4 :

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\mu = -2 \frac{1}{4} \text{Sp } \gamma_\mu \gamma^\mu = -8.$$

Insgesamt kommt

$$\frac{1}{16} \text{Sp}_5 = -2 [(p q)^2 - 2 m^2 p q]. \quad (6.21)$$

Zur Ermittlung des differentiellen Wirkungsquerschnittes wählen wir ein passendes LORENTZ-System. β sei die Geschwindigkeit eines Elektrons im Ruhssystem des zweiten, β' die Geschwindigkeit im Schwerpunktsystem. Es sei

$$\kappa = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \kappa' = (1 - \beta'^2)^{-1/2}. \quad (6.22)$$

Aus dem Additionstheorem $\beta' = (\beta - \beta')/(1 - \beta \beta')$ erhält man

$$\beta' = \kappa \beta (\kappa + 1)^{-1}, \quad (6.23)$$

$$\kappa' = \sqrt{\frac{1}{2} (\kappa + 1)}. \quad (6.24)$$

Werten wir nun σ im Schwerpunktsystem aus; zunächst

$$p q = 2 p_0^2 - m^2, \quad p p' = p_0 p'_0 - \mathbf{p} \mathbf{p}', \quad q p' = p_0 p'_0 + \mathbf{p} \mathbf{p}';$$

weiter mit Gl. (6.5)

$$\delta ((p + q - p')^2 - m^2) = \frac{1}{4 p_0} \delta (p'_0 - p_0), \quad (6.25)$$

$$\delta (p'^2 - m^2) = \frac{1}{2 |\mathbf{p}|} \delta (|\mathbf{p}'| - |\mathbf{p}|); \quad (6.26)$$

$$((p q)^2 - p^2 q^2)^{-1/2} = 1/(2 p_0 |\mathbf{p}|). \quad (6.27)$$

Bei den Spuren treten zunächst

$$(p - p')^2 = 2 (m^2 - p p'), \quad (p - q')^2 = 2 (m^2 - p q')$$

auf; mit

$$p p' = m^2 + 2 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta, \quad p q' = m^2 + 2 |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \frac{1}{2} \vartheta,$$

worin ϑ den Winkel zwischen \mathbf{p} und \mathbf{p}' bedeutet, kommt

$$(p - p')^2 = -4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta', \quad (p - q')^2 = -4 |\mathbf{p}|^2 \cos^2 \vartheta'$$

(wir setzen vorübergehend $\vartheta/2 = \vartheta'$).

Zur Umformung der Spuren verwenden wir

$$\begin{aligned} p q &= \kappa m^2, \\ q p' &= m^2 [\kappa + (1 - \kappa) \sin^2 \vartheta'], \\ p p' &= m^2 [\kappa + (1 - \kappa) \cos^2 \vartheta']. \end{aligned}$$

Dies gibt für die geschlungene Klammer von Gl. (6.14) $2 m^4 |\mathbf{p}|^{-4}$ mal

$$\begin{aligned} & \sin^{-4} \vartheta' (2 \kappa^2 + 2 (1 - \kappa^2) \sin^2 \vartheta' + (1 - \kappa^2)^2 \sin^4 \vartheta') \\ & + \cos^{-4} \vartheta' (2 \kappa^2 + 2 (1 - \kappa^2) \cos^2 \vartheta' + (1 - \kappa^2)^2 \cos^4 \vartheta') \\ & + 2 \sin^{-2} \vartheta' \cos^{-2} \vartheta' (\kappa^2 - 2 \kappa) \\ & = 2 \kappa^2 [\sin^{-4} \vartheta' + \cos^{-4} \vartheta' - \sin^{-2} \vartheta' \cos^{-2} \vartheta'] \\ & + ((1 - \kappa)/\kappa)^2 (1 + \sin^{-2} \vartheta' \cos^{-2} \vartheta'). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dazu merken wir an

$$|\mathbf{p}|^{-4} = 4 (\kappa + 1)^2 (m \kappa \beta)^{-4}.$$

Wegen Gl. (6.25) und (6.26) wird σ ein Integral über die Raumwinkel, in welche \mathbf{p}' fällt. Von den Faktoren außerhalb der geschlungenen Klammer verbleibt

$$e^4 \frac{1}{16} \frac{1}{2 p_0} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{(2\pi)^2} |\mathbf{p}|^2 d\Omega \frac{1}{4 p_0} \frac{1}{2 |\mathbf{p}|} = \frac{1}{64} a^2 \frac{1}{p_0^2} d\Omega;$$

$$\frac{1}{p_0^2} = \frac{2}{(\kappa + 1) m^2}.$$

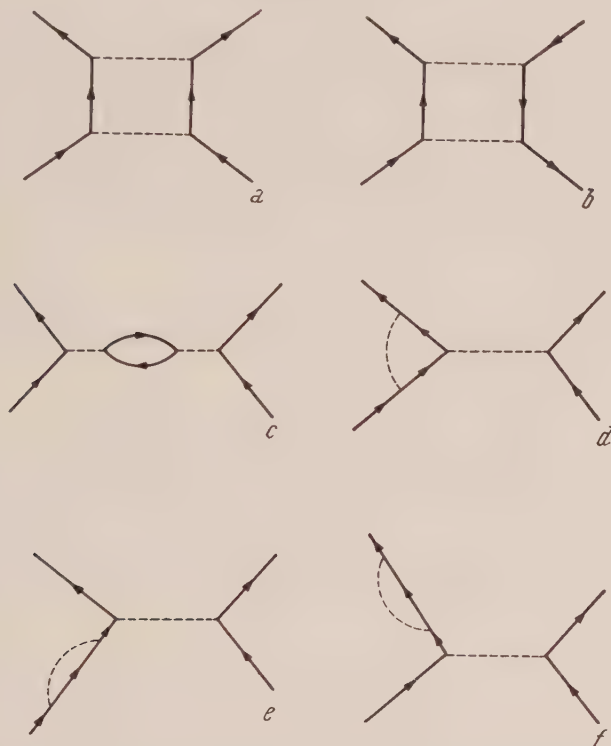


Abb. 2. Graphen vierter Ordnung zur MÖLLER-Streuung.

Für die Streuung in den Raumwinkel $d\Omega$ im Schwerpunkssystem erhalten wir somit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2 (\kappa + 1)}{2 m^2 \kappa^2 \beta^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta/2} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta/2 \cos^2 \vartheta/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1 - \kappa)^2}{\kappa^2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta/2 \cos^2 \vartheta/2} \right) \right\}. \quad (6.29)$$

Dies ist die bekannte MÖLLERSche Formel.

In vierter Näherung tragen zu dem betrachteten Prozeß die Graphen der Abb. 2 bei. Zu Graph *a* gehört

$$e^4 \int dk \bar{u}' \gamma_\lambda \frac{\mathbf{p} - \mathbf{k} + m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma_\mu u \bar{v}' \gamma^\lambda \frac{\mathbf{q} + \mathbf{k} + m}{(q+k)^2 - m^2} \gamma^\mu v \cdot \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p-p'-k)^2} =$$

$$= e^4 [\bar{u}' \gamma_\lambda (\mathbf{p} + m) \gamma_\mu u \bar{v}' \gamma^\lambda (\mathbf{q} + m) \gamma^\mu v \cdot J$$

$$- \bar{u}' \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma_\mu u \bar{v}' \gamma^\lambda (\mathbf{q} + m) \gamma^\mu v \cdot J_\alpha$$

$$+ \bar{u}' \gamma_\lambda (\mathbf{p} + m) \gamma_\mu u \bar{v}' \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\mu v \cdot J_\beta$$

$$- \bar{u}' \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma_\mu u \bar{v}' \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\mu v \cdot J_{\alpha\beta}], \quad (6.30)$$

$$J_{(\alpha, \beta)} = \int dk \frac{1 (k_\alpha, k_\alpha k_\beta)}{((p-k)^2 - m^2) ((q+k)^2 - m^2) k^2 (p-p'-k)^2},$$

wie man sofort einsieht, wenn man die Impulsvariablen zu den Linien des Graphen schreibt, unter Berücksichtigung der Energieimpulserhaltung bei jeder Wechselwirkung, wie sie die Integrationen über den ganzen Raum nach sich ziehen. Von Gl. (6.30) ist zur vollständigen Berücksichtigung von *a* noch der Austauschterm ($u' \leftrightarrow v'$, $p' \leftrightarrow q'$) zu subtrahieren.

Der Beitrag von *b* ist ähnlich Gl. (6.30). *c*—*f* sind reduzible Graphen. Sie liefern Integrale mit bloß zwei, bzw. drei Faktoren im Nenner des Integranden; *c* enthält das Vakuumpolarisationsintegral und *d* von dem Verzweigungsteil

$$\int dk \frac{(1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta)}{((p-k)^2 - m^2) ((p'-k)^2 - m^2) k^2}.$$

Die beiden letzten Graphen sind nach den allgemeinen Überlegungen des Kap. 5 unwichtig; sie kompensieren nur einen (unendlichen) Term aus Graph *d*.

Zur Ermittlung der Impulsraumintegrale wurden von FEYNMAN sehr wirkungsvolle Methoden angegeben*. Die Produktenner lassen sich durch mehrfache Anwendung der Identität

$$1/a b = \int_0^1 du [a u + b (1-u)]^{-2} \quad (6.31)$$

zusammenfassen, so daß nur Nenner der Form $k^2 + 2 p k + \tau$ verbleiben. In diesen kann man nun nach einer Transformation $k = k' - p$ den Integrationsweg von k'_0 etwa über das negativ Imaginäre schließen und erhält so von dieser Integration das Residuum von einem der beiden Pole von k'_0 , wenn man diese wie bei Δ_+ oder wie bei Δ_- zu umgehen hat. Auf diese Weise erhält man

$$\int dk [k^2 + 2 p k + \tau]^{-3} = (\pi^2/2 i) (p^2 - \tau)^{-1}, \quad (6.32)$$

$$\int dk [k^2 + 2 p k + \tau]^{-4} = -(\pi^2/6 i) (p^2 - \tau)^{-2} \quad (6.33)$$

* R. P. FEYNMAN, Physic. Rev. **76**, 769 (1949), Appendix.

für Δ_+ -artigen Integrationsweg; für Δ_- -artigen verkehren sich die Vorzeichen. Die analogen Integrale mit k_a, k_b im Zähler kann man als Linearkombinationen einfacherer Integrale darstellen*.

Allgemein ist es zweckmäßig, an Stelle der D, Δ_- mit einer kleinen Photonmasse λ zu verwenden, also etwa in J

$$[k^2 - \lambda^2]^{-1} [(p - p' - k)^2 - \lambda^2]^{-1}$$

zu schreiben. Man umgeht so die auch in der älteren Theorie verstandenen „Infrarotkatastrophen“, die auf einem Versagen der Störungsmethode für langwellige Photonen beruhen. Am natürlichsten wäre ihnen aus diesem Grunde durch Verschieben der unteren Integrationsgrenze von $|t|$ von Null auf einen kleinen positiven Wert zu begegnen. λ beseitigt jedoch den Pol an der unteren Grenze genau so gut und ist zudem vom LORENTZ-System unabhängig.

Berechnungen der Glieder proportional a von D_+', S_+', Γ_μ , die man für die reduzierten Graphen braucht, finden sich bei SCHWINGER**, KARPLUS und KROLL*** und bei BROWN und FEYNMAN****.

7. LAMBshift.

Ein Elektron in einem vorgegebenen Feld $A_\mu^e(x)$ wird durch die Gleichung

$$(i \gamma_\mu \partial / \partial x_\mu - m) \psi(x) = (A^e(x) + A(x)) \psi(x) \quad (7.1)$$

beschrieben. Wir lösen diese Gleichung zunächst für $A_\mu(x) = 0$:

$$(i \gamma_\mu \partial / \partial x_\mu - m) \psi(x) = A^e(x) \psi(x). \quad (7.2)$$

Die exakte Lösung ist dann $S^{-1}(\sigma) \psi(x) S(\sigma)$,

$$S(\sigma) = 1 - i \int_{-\infty}^{\sigma} j_\mu(x') A^\mu(x') S(\sigma') d\omega'. \quad (7.3)$$

Gl. (7.3) ist natürlich von Gl. (2.10'') verschieden, da die Viererstromoperatoren verschieden sind.

Um die von der zusätzlichen Wechselwirkung kommende Energieeigenwertstörung in niedrigster Näherung kennenzulernen, berechnen wir das Diagonalelement von S_2 zu einem Energieeigenzustand; die Energiedichtekorrekturen ist gegeben durch [vgl. Gln. (4.21) und (4.21')]

$$\text{Re}(-i) \int_{-\infty}^{\sigma} \langle E | H_1(x) H_1(x') | E \rangle d\omega'. \quad (7.4)$$

* BROWN und FEYNMAN, Physic. Rev. **85**, 231 (1952), Appendix Y, (e).

** Physic. Rev. **76**, 790 (1949).

*** Physic. Rev. **77**, 536 (1950).

**** Physic. Rev. **85**, 231 (1952).

(Der Imaginärteil bringt das Abklingen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zustand $|E\rangle$ zum Ausdruck:

$$|S_{EE}|^2 = 1 + (S_1)_{EE} + (S_1^+)_{EE} = 1 + 2 \operatorname{Re} (S_1)_{EE};$$

ein Imaginärteil in der Wechselwirkungsenergie ergibt einen Realteil in S_1 .)

Die Eigenwertstörung ist also enthalten in

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \int dV \int (E | T j_\mu(x) A^\mu(x) j_\nu(x') A^\nu(x') | E) d\omega' = \\ & = -i \int dV \int (E | j_\mu(x) E) | i D_+(x-x') (0 | j^\mu(x') | 0) d\omega' \quad (7.5) \\ & - i e^2 \int dV \int (E | \bar{\psi}(x) \gamma_\mu i D_+(x-x') i S_+^e(x-x') \gamma^\mu \psi(x') | E) d\omega'. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der beiden Beiträge ist klar. Der erste drückt die Wechselwirkung mit dem Vakuumpolarisationsstrom aus. Im zweiten haben wir die Rückwirkung des Elektrons auf sich selbst durch Emission und Reabsorption eines virtuellen Photons vor uns, also die Selbstenergie.

$S_+^e(x)$ ist das Analogon von Gl. (4.15), gebildet mit $\psi(x)$ von Gl. (7.2); somit

$$\begin{aligned} & \sum \psi_\alpha^J(x) \bar{\psi}_\beta^J \psi(x'), \quad t > t', \\ i S_{+\alpha\beta}^e(x-x') &= \sum \psi_\beta^J(x') \bar{\psi}_\alpha^J \psi(x), \quad t < t'. \end{aligned}$$

Untersuchen wir ganz kurz am Beispiel des Selbstenergieterms die Äquivalenz der alten und der neuen Formulierung der Quantenelektrodynamik; es ist

$$\begin{aligned} (0 | \psi(x) | E) &= \psi_E(x) = \psi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad \psi_J(x) = \psi_J(\mathbf{r}) e^{-iE_J t}, \\ i D^{(+)}(x-x') &= (2\pi)^{-3} \int \delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2) e^{ik(x-x')} d\mathbf{k}_0 d^3\mathbf{k} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{k} (2k_0)^{-1} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k_0 t) - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - k_0 t')}. \end{aligned}$$

Von $t' < t$ erhalten wir so

$$\begin{aligned} & \sum_J \int d^3\mathbf{k} \int \psi_E^*(\mathbf{r}) a_\mu \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{2k_0}} \psi_J(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \int \psi_J^*(\mathbf{r}') \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}}{\sqrt{2k_0}} a^\mu \psi_E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ & \times (-i) e^{i(E-E_J-k)t} \int_{-\infty}^t e^{-i(E-E_J-k)t'} dt'. \end{aligned}$$

Die $H_{EJ}^1 H_{JE}^1$ der gewöhnlichen Störungstheorie stehen bereits da ($t' > t$ liefert die Positronenzwischenzustände), die Zeitintegration

bringt noch die Energienenner hinein; um von $-\infty$ an integrieren zu können, muß man das Feld erst adiabatisch einschalten, wir fügen deshalb ein $\exp \varepsilon t$ dazu:

$$\int_{-\infty}^t \exp [(iW + \varepsilon) t'] dt' = -i(W - i\varepsilon)^{-1} \exp (iWt),$$

$$\frac{1}{W - i\varepsilon} = \frac{W}{W^2 + \varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon}{W^2 + \varepsilon^2} = P \frac{1}{W} + i\pi \delta(W);$$

man überzeugt sich leicht, daß die Funktionen im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ die Integraleigenschaften eines Hauptwertes und einer δ -Funktion besitzen.

Der Vakuumstrom, der in Gl. (7.5) auftritt, ist in niedrigster Näherung in $A^e(x)$ durch Gl. (3.9) gegeben. Wir können das Integral dort sofort auswerten, wenn $A^e(x)$ nicht zu stark variiert: $\kappa^{-2} \square A \ll A^e$. Dann darf man $(\hbar/\kappa)^2$ in Gl. (3.9') null setzen und bekommt $F_n(x) = (2n+1)^{-1} \delta(x)$, womit der beobachtbare Teil des Vakuumstromes gleich $(\alpha/15\pi) \kappa^{-2} \square J_\mu(x)$ wird. Da $D_+(x)$ nach Gl. (4.11) eine GREEN-Funktion zur D'ALEMBERTSchen Gleichung ist, gilt

$$\int D_+(x-x') J_\mu(x') d\omega' = A_\mu^e(x),$$

und wir erhalten

$$j^\mu(x) (\alpha/15\pi) (\square/m^2) A_\mu^e(x) \quad (7.6)$$

als Beitrag zur Energiedichte. $(\alpha/15\pi) (\square/m^2) A_\mu^e(x)$ ist nichts anderes als das Glied proportional α von $A_\mu^{e'}(x)$ [Gl. (5.20)].

Wenden wir uns nun der Berechnung der Selbstenergie des gebundenen Elektrons zu. Wir beschränken uns wieder auf die erste Näherung in A^e und können dann schreiben

$$iS_+^e(x-x') = iS_+(x-x') -$$

$$-i^2 e \int S_+(x-x'') A^e(x'') S_+(x''-x') d\omega'', \quad (7.7)$$

denn das virtuelle Elektron wird sich in nullter Näherung frei bewegen, in erster Näherung einmal gestreut werden. Ebenso schreiben wir

$$\psi_E(x) = \int \varphi(p) e^{i(p\mathbf{r}-Et)} d^3p -$$

$$-i^2 e \int S_+(x'-x) A^e(x) \varphi(p) e^{i(p\mathbf{r}-Et)} d\omega' d^3p,$$

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad \mathbf{p} \varphi(p) = m \varphi(p). \quad (7.8)$$

Man erhält so in nullter Näherung natürlich die Selbstenergie eines freien Elektrons. Die Abweichung hiervon in erster Näherung wird repräsentiert durch drei Graphen, die man aus Abb. 2 des Kap. 4 erhält, wenn man die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld vor, zwischen oder nach den beiden Wechselwirkungen mit dem Strahlungsfeld berücksichtigt. Diese Graphen beschreiben auch drei Korrekturen zum Streuelement der ersten BORNschen Näherung an A^e . Wir können daher die allgemeinen Resultate des Kap. 5 über Streumatrixelemente heranziehen, welche besagen, daß zwei von den Graphen [nämlich die dem Korrekturglied in Gl. (7.8) entsprechenden] lediglich den Renormierungsanteil des dritten kompensieren.

Wir brauchen uns also nur mit

$$-\frac{ie^3}{(2\pi)^4} \int \bar{\varphi}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - m)^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{q}) (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma^\mu \varphi(\mathbf{p}_1) \\ \times \frac{1}{k^2} d^4k d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad (7.9)$$

zu befassen; $\mathbf{a}(\mathbf{q})$ ist die wirksame FOURIER-Komponente des Potentials. Der DIRAC-Operator zwischen den beiden Spinoren läßt sich ohne wesentliche Schwierigkeiten mittels der Standardmethoden FEYNMANS berechnen. Man ersetzt $1/k^2$ durch

$$-\int_{\lambda^2}^{A^2} dL (k^2 - L)^{-2},$$

mit $A^2 \gg m^2$ (Regularisierung), $\lambda^2 \ll m^2$ (Infrarotkatastrophe). Als nächsten Schritt kann man die Nenner von den Elektronlinien mittels Gl. (6.31) zusammenfassen. Den entstehenden quadratischen Nenner kombiniert man nochmals mit $(k^2 - L)^{-2}$ [man erhält eine Formel für $a^{-2} b^{-2}$, wenn man Gl. (6.31) nach a und b differenziert]. Nun führt man die k -Integration mit Hilfe von Gl. (6.32) aus, dann das Integral über L und zuletzt die durch Gl. (6.31) eingeführten Parameterintegrationen. Die ausführliche Rechnung findet sich bei FEYNMAN, a. a. O., Appendix B. Das Resultat ist

$$\frac{e\alpha}{\pi} \int \bar{\varphi}(\mathbf{p}_2) \left[Y^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{q}) + \frac{1}{8m} (\mathbf{q} \mathbf{a}(\mathbf{q}) - \mathbf{a}(\mathbf{q}) \mathbf{q}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) \left(\frac{q}{m} \right)^2 \mathbf{a}(\mathbf{q}) \right] \varphi(\mathbf{p}_1) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2, \quad (7.10)$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{A}{m} + \frac{9}{8} - \ln \frac{m}{\lambda}.$$

Der erste Summand renormiert das Streumatrixelement und wird, wie oben dargelegt, kompensiert. Der zweite läßt sich mit dem Spin-tensor

$$\sigma_{\mu\nu} = (i/2) (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (7.11)$$

schreiben als

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2\pi} \int \bar{\varphi}(\mathbf{p}_2) \frac{e}{2m} \sigma_{\mu\nu} (-i) q^\mu a^\nu(q) \varphi(\mathbf{p}_1) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int \bar{\psi}_E(\mathbf{r}) \frac{e}{2m} \sigma_{\mu\nu} (\partial A^{\mu\nu} / \partial x_\nu) \psi_E(\mathbf{r}) dV. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Man sieht nun, daß die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld das magnetische Moment eines Elektrons in erster Näherung um das $(\alpha/2\pi)$ -fache eines BOHRschen Magnetons ändert; Gl. (7.12) ist die Energie der Wechselwirkung dieses anormalen magnetischen Moments mit A_μ^e .

Der dritte Term gibt den Hauptanteil zum LAMBshift; es ist

$$-\int \bar{\varphi}(\mathbf{p}_2) \left(\frac{q}{m}\right)^2 a(q) \varphi(\mathbf{p}_1) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 = \int \psi_E^*(\mathbf{r}) m^{-2} A A_\mu^e(\mathbf{r}) \alpha^\mu \psi_E(\mathbf{r}) dV.$$

Dieser Teil der Selbstenergie ändert wie die Vakuumpolarisation den Effektivwert von $A_\mu^e(x)$, und zwar um einen Betrag

$$-(\alpha/3\pi) [\ln(m/\lambda) - (3/8)] (\square/m^2) A_\mu^e(x), \quad (7.13)$$

so daß ein Gl. (7.6) analoges Glied zur Energiedichte hinzutritt.

Wenn man Gl. (7.13) statt für eine endliche Photonmasse für eine untere Grenzwellenzahl k berechnet, erhält es die Gestalt

$$-(\alpha/3\pi) [\ln(m/2k) + (11/24)] (\square/m^2) A_\mu^e(x). \quad (7.14)$$

Daß für k ein endlicher Wert eingesetzt werden muß, ist einleuchtend deshalb, weil das Elektron im Zustand $\psi_E(x)$ eine begrenzte Ausdehnung hat und daher nicht mit beliebig langwelligen FOURIER-komponenten des Strahlungsfeldes wechselwirken kann. Da das Problem mit relativistischen Effekten nichts zu tun hat, kann man die Ergebnisse der nichtrelativistischen Berechnung BETHES für k einsetzen, die dieser durch numerische Berechnung einer gemittelten Anregungsenergie $E_J - E$ erhält*.

Schluß.

Ein Herauskehren der relativistischen Invarianz der Theorie durch ausschließliches Verwenden vom LORENTZ-System unabhängiger Größen, der Ausbau des Kalküls mit den singulären D - und S -Funktionen, schließlich die Heranziehung graphischer Darstellungen hat die Klarheit des Formalismus der Quantenelektrodynamik außerordentlich erhöht. Invariante Limitierungsverfahren gestatten die Manipulation mit den bislang störenden Impulsraumintegralen der Störungstheorie. Führt man eine Renormierung von Ladung und Masse durch, so zeigt sich, daß die unendlichen Größen nur in Renormierungsfaktoren auftreten, jedoch nirgends in beobachtbaren Effekten.

* BETHE, BROWN, STEHN, Physic. Rev. 77, 370 (1950).

Auf diese Weise ist es mit halbwegs erträglichem Rechenaufwand möglich, etwa die ersten beiden nichtverschwindenden Näherungen irgendeines Effektes auszurechnen. Daß man praktisch kaum noch höhere Näherungen rechnen kann, ist wegen der Kleinheit der Feinstrukturkonstante kein Mangel; und bei extrem hohen Energien, wo dieses Argument nicht stichhältig wäre, kann man gar nicht erwarten, daß eine reine Quantenelektrodynamik ohne Berücksichtigung der anderen Elementarteilchen überhaupt sinnvoll ist.

Die wenigen bisher gefundenen Diskrepanzen zwischen der DIRACschen Elektronentheorie und dem Experiment wurden durch die strahlungstheoretischen Korrekturen in überzeugender Weise zum Verschwinden gebracht. Das Experiment von LAMB und RETHERFORD¹ etwa, welches am Beginn der großen Erweiterung unserer Kenntnisse über die Quantenelektrodynamik stand, lieferte für die Energiedifferenz des $^2S_{1/2}$ - und $^2P_{1/2}$ -Zustandes im Wasserstoffatom, durch die korrespondierende Lichtwellenfrequenz ausgedrückt, 1061 ± 2 MHz. Andererseits ergeben sich für die Differenz der Eigenwertstörung dieser beiden Zustände mit den im letzten Kapitel erhaltenen Ausdrücken 1051,4 MHz. Die Berechnung der in A^e quadratischen Korrekturen* erhöhte das Ergebnis inzwischen auf 1058,3 MHz. Diese Übereinstimmung ist der klarste Beweis für die Richtigkeit des neu beschrittenen Weges.

Ich danke Herrn Prof. Dr. P. URBAN für sein Interesse am Fortgang meiner Arbeiten, ebenso Herrn Dr. W. THIRRING für die Unterstützung beim Studium der neuen Strahlungstheorien.

¹ Literatur bei W. THIRRING, Acta Phys. Austr., IV, 325 (1950).

* M. BARANGER, Physic. Rev. 84, 866 (1951).

Das vollständige System der elektromagnetischen Eigenschwingungen eines zweiachsig anisotropen Parallelepipeds.

Von

E. Hafner.

Institut für Theoretische Physik der Universität Graz.

(Eingelangt am 10. Juni 1952.)

Zusammenfassung.

Im folgenden wird ein Lösungssystem der MAXWELLSchen Gleichungen im Inneren eines energetisch abgeschlossenen optisch zweiachsigen Kristalles angegeben, bei dem die Hauptachsen des dem Tensor der Dielektrizitätskonstanten (DK) zugeordneten Ellipsoids den Kanten des ihn begrenzenden Parallelepipeds gleichgerichtet sind. Die Lösungen können als Verallgemeinerungen der bei isotropen, bzw. einachsig anisotropen Medien als elektrischer, bzw. magnetischer Typ bekannten Lösungsmannigfaltigkeiten aufgefaßt werden. Sie werden additiv aus den Lösungen zusammengesetzt, die sich aus je einem zweikomponentigen Ansatz für den HERTZschen, bzw. FITZGERALDSchen Vektor ergeben. Die Vollständigkeit der gefundenen Lösungssysteme wird auf Grund von Stetigkeitsbetrachtungen nachgewiesen.

Verwendete Bezeichnungen:

ϵ = Tensor der relativen Dielektrizitätskonstanten.

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ = relative Hauptdielektrizitätskonstanten.

ϵ_0 = Dielektrizitätskonstante des Vakuums in praktischen Einheiten.

μ, μ_0 = Permeabilität in praktischen Einheiten.

$\omega = 2\pi\nu$ = Kreisfrequenz.

$\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ = elektrische, bzw. magnetische Feldstärke.

1. Allgemeines.

Bekanntlich ist die Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} = j \omega \epsilon_0 \mathfrak{E}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -j \omega \mu \mu_0 \mathfrak{H}$$

äquivalent mit der Lösung der Gleichung

$$\epsilon^{-1} \text{rot rot } \mathfrak{A} = k_0^2 \mathfrak{A} + \frac{k_0^2}{\omega^2} \text{grad } \Phi, \quad (2)$$

bzw.

$$\text{rot } \epsilon^{-1} \text{rot } \mathfrak{B} = k_0^2 \mathfrak{B} + \frac{k_0^2}{\omega^2} \text{grad } \Psi, \quad (3)$$

mit $k_0^2 = \epsilon_0 \mu \mu_0 \omega^2$, wobei die Eichung von \mathfrak{Z} bzw. \mathfrak{G} , das heißt die Bestimmung des Potentials Φ , bzw. Ψ vollkommen willkürlich durchgeführt werden kann [1]. Das elektromagnetische Feld findet man aus den Lösungen von (2) und (3) durch die Formeln

$$\mathfrak{E} = \omega^2 \mathfrak{Z} + \text{grad } \Phi, \quad (2a)$$

$$\mu \mu_0 \mathfrak{H} = j \omega \text{rot } \mathfrak{Z}, \quad (2b)$$

bzw.

$$\epsilon_0 \mathfrak{E} = -j \omega \text{rot } \mathfrak{G}, \quad (3a)$$

$$\mathfrak{H} = \omega^2 \mathfrak{G} + \text{grad } \Psi. \quad (3b)$$

Prinzipiell könnte man nun wohl sämtliche Eigenschwingungen entweder nur aus Gl. (2) oder nur aus Gl. (3) erhalten, müßte aber dann verzichten, über \mathfrak{Z} , bzw. \mathfrak{G} weitere Voraussetzungen, welche die Integration erleichtern sollten, zu treffen. Zwar bleibt die Wahl von Φ , bzw. Ψ immer willkürlich, doch findet man nur für einen rechteckigen homogenen isotropen Hohlraumresonator (HR) das vollständige Eigenfunktionssystem von Gl. (2) aus dem Produktansatz für die Komponenten von \mathfrak{Z} . In allen jenen Fällen aber, in denen das Eigenwertspektrum des elektrischen Typs von dem des magnetischen Typs verschieden ist, liefert der Produktansatz aus Gl. (2) nur das Feld des elektrischen Typs, aus Gl. (3) nur das des magnetischen Typs, auch wenn man alle drei Komponenten von \mathfrak{Z} , bzw. \mathfrak{G} berücksichtigt.

Wir werden also die beiden Vektoren simultan beibehalten und ihre Komponenten in Form von Produkten anzusetzen versuchen. Dabei genügt es, je zwei Komponenten der genannten Vektoren zu verwenden, da ein dreikomponentiger Ansatz wegen der Freiheit in der Normierung der Vektoren keine Erweiterung der Lösungsmannigfaltigkeit bringt.

Die in diesem Sinne mit Hilfe des HERTZschen Ansatzes Gl. (2b) gewonnene Lösungsmannigfaltigkeit Gl. (2a, b) wollen wir als Z-Typ, die aus dem FITZGERALDSchen Ansatz Gl. (3a) folgende Gl. (3a, b) als G-Typ bezeichnen. Im folgenden sollen nun die elektromagnetischen Feldgrößen des Z- und des G-Typs im Inneren eines rechteckigen HR, der mit einem optisch zweiachsigen Kristall ganz ausgefüllt ist, abgeleitet werden.

2. Der Z-Typ im Parallelepiped.

Wir betten das Parallelepiped in ein kartesisches Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 ein und nehmen an, der Kristall sei so orientiert, daß die Hauptachsen des Tensorellipsoids der DK die Richtungen der Koordinatenachsen aufweisen. Der Tensor der DK hat dann in diesem Koordinatensystem die Form

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Um nun die Feldverteilung des Z -Typs zu finden, haben wir die Gl. (2) unter Berücksichtigung der aus $\mathfrak{E}_t = 0$ folgenden Randbedingungen für 3 zu integrieren. Ihre Komponenten findet man mit

$$3 = Z_1 \mathbf{e}_1 + Z_2 \mathbf{e}_2 \quad (5)$$

nach Anwendung der bekannten Vektoridentität

$$\text{rot rot } 3 = -\Delta 3 + \text{grad div } 3$$

in der Form

$$\begin{aligned} \Delta Z_1 + \varepsilon_1 k_0^2 Z_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\text{div } 3 - \frac{\varepsilon_1 k_0^2}{\omega^2} \Phi \right), \\ \Delta Z_2 + \varepsilon_2 k_0^2 Z_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\text{div } 3 - \frac{\varepsilon_2 k_0^2}{\omega^2} \Phi \right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\text{div } 3 - \frac{\varepsilon_3 k_0^2}{\omega^2} \Phi \right), \end{aligned} \quad (6)$$

da in einem kartesischen Koordinatensystem

$$\Delta Z \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \Delta Z_i = \mathbf{e}_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_k^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

gilt. Um die dritte Gleichung von (6) zu befriedigen, setzen wir, wozu wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit berechtigt sind,

$$\Phi = \frac{\omega^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \text{div } 3 \quad (7)$$

und erhalten nach einfachen Umformungen für Z_1 und Z_2 die Differentialgleichungen

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_3^2} + \varepsilon_1 k_0^2 Z_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right) \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (8 \text{ a})$$

$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_3^2} + \varepsilon_2 k_0^2 Z_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right) \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (8 \text{ b})$$

Nun sind nach Gl. (2 a, b) unter Verwendung von Gl. (5), (7) und (8) die Komponenten des elektromagnetischen Feldes des Z -Typs durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 E_1^z &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_3^2} \right\}, & \mu \mu_0 H_1^z &= -j \omega \frac{\partial Z_2}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_2 E_2^z &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_3^2} \right\}, & \mu \mu_0 H_2^z &= j \omega \frac{\partial Z_1}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_3 E_3^z &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right\}, & \mu \mu_0 H_3^z &= j \omega \left(\frac{\partial Z_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

gegeben. Wir finden daraus die Randbedingungen für Z_1 und Z_2 zu

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_3^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \end{aligned} \right\} x_1 = 0, l_1, \quad (10 a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_3^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \end{aligned} \right\} x_2 = 0, l_2, \quad (10 b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_3^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x_3^2} &= 0 \end{aligned} \right\} x_3 = 0, l_3, \quad (10 c)$$

wobei l_1, l_2, l_3 die Kantenlängen des Parallelepipeds bedeuten.

Mit dem Ansatz

$$Z_1 = z_1 \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \varphi_3(x_3), \quad (11)$$

$$Z_2 = z_2 \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \psi_3(x_3) \quad (12)$$

ergeben sich aus Gl. (10) für die φ_i und ψ_i widerspruchsfrei die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_1'(0) = \varphi_1'(l_1) = \psi_1(0) = \psi_1(l_1) &= 0, \\ \varphi_2(0) = \varphi_2(l_2) = \psi_2'(0) = \psi_2'(l_2) &= 0, \\ \varphi_3(0) = \varphi_3(l_3) = \psi_3(0) = \psi_3(l_3) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

denen wir, da alle drei Variable x_1, x_2, x_3 zyklisch sind, nur durch

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cos \alpha_1 x_1, & \varphi_2 &= \sin \alpha_2 x_2, & \varphi_3 &= \sin \alpha_3 x_3, \\ \psi_1 &= \sin \alpha_1 x_1, & \psi_2 &= \cos \alpha_2 x_2, & \psi_3 &= \sin \alpha_3 x_3 \end{aligned} \quad (14)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{n\pi}{l_1} & (n &= 0, 1, 2, \dots), \\ \alpha_2 &= \frac{m\pi}{l_2} & (m &= 0, 1, 2, \dots), \\ \alpha_3 &= \frac{\nu\pi}{l_3} & (\nu &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (15)$$

genügen können. Gehen wir nun mit

$$Z_1 = z_1 \cos \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 \sin \alpha_3 x_3, \quad (16)$$

$$Z_2 = z_2 \sin \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 \sin \alpha_3 x_3 \quad (17)$$

in die Differentialgleichungen (8 a) und (8 b) ein, so liefern uns diese zwei lineare homogene Gleichungen zur Bestimmung von z_1 und z_2 . Sie lauten

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_1 k_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \right) z_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right) a_1 a_2 z_2 &= 0, \\ \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right) a_1 a_2 z_1 + \left(\varepsilon_2 k_0^2 - a_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} a_2^2 - a_3^2 \right) z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Die Forderung nach nichttrivialen Lösungen ergibt die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} k_0^4 - k_0^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} (a_2^2 + a_3^2) + \frac{1}{\varepsilon_2} (a_3^2 + a_1^2) + \frac{1}{\varepsilon_3} (a_1^2 + a_2^2) \right\} + \\ + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \left(\frac{a_1^2}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} + \frac{a_2^2}{\varepsilon_3 \varepsilon_1} + \frac{a_3^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

zur Bestimmung der Eigenwerte $k_{0m,n,v}^2$, und wir finden

$$z_1 = \varepsilon_2 k_0^2 - a_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} a_2^2 - a_3^2 \quad (21)$$

$$z_2 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} - 1 \right) a_1 a_2. \quad (22)$$

Gehen wir nun mit den Ansätzen Gl. (16) und (17) in Verbindung mit Gl. (21) und (22) in die Gl. (9) ein, so erhalten wir für das elektromagnetische Feld des Z-Typs die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 E_1^* &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right) a_1^2 a_2^2 + (a_2^2 + a_3^2) \left(\varepsilon_2 k_0^2 - a_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} a_2^2 - a_3^2 \right) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \cos a_1 x_1 \sin a_2 x_2 \sin a_3 x_3, \\ \varepsilon_2 E_2^* &= - \frac{\omega^2}{k_0^2} a_1 a_2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \{ \varepsilon_3 k_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \} \sin a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \sin a_3 x_3 \\ \varepsilon_3 E_3^* &= - \frac{\omega^2}{k_0^2} a_1 a_3 \{ \varepsilon_2 k_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \} \sin a_1 x_1 \sin a_2 x_2 \cos a_3 x_3, \end{aligned} \quad (24 a)$$

$$\begin{aligned} \mu \mu_0 H_1^* &= j \omega \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \right) a_1 a_2 a_3 \sin a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \cos a_3 x_3, \\ \mu \mu_0 H_2^* &= j \omega a_3 \left(\varepsilon_3 k_0^2 - a_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} a_2^2 - a_3^2 \right) \cos a_1 x_1 \sin a_2 x_2 \cos a_3 x_3, \\ \mu \mu_0 H_3^* &= - j \omega a_2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \left(\varepsilon_3 k_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} a_3^2 \right) \cos a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \sin a_3 x_3. \end{aligned} \quad (24 b)$$

3. Der G-Typ im Parallelepip.

Das elektromagnetische Feld des G-Typs ist definitionsgemäß durch Gl. (3 a) und (3 b) gegeben, wenn \mathfrak{G} eine Lösung von Gl. (3) ist, die den aus $\mathfrak{G}_i = 0$ folgenden Randbedingungen genügt. Um das Feld darzustellen, haben wir also die Gl. (3) zu integrieren.

Die Komponenten dieser Gleichung ergeben sich mit Gl. (25)

$$\mathfrak{G} = G_1 \mathfrak{e}_1 + G_2 \mathfrak{e}_2$$

wegen

$$\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\epsilon_3 \end{pmatrix}$$

nach einfacher Rechnung zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_3^2} + k_0^2 G_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial G_2}{\partial x_2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \Psi \right), \\ \frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_3^2} + k_0^2 G_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial G_2}{\partial x_2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \Psi \right), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial G_2}{\partial x_2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \Psi \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Setzen wir nun

$$\frac{k_0^2}{\omega^2} \Psi = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial G_2}{\partial x_2}, \quad (27)$$

so erhalten wir aus Gl. (26) ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung von G_1 und G_2 .

Es lautet

$$\frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_3^2} + k_0^2 G_1 = \left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (28 a)$$

$$\frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_3^2} + k_0^2 G_2 = \left(\frac{1}{\epsilon_3} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (28 b)$$

Um zu den zugehörigen Randbedingungen zu gelangen, wollen wir zunächst Gl. (3 a) und (3 b) in Komponenten zerlegen.

Wir finden unter Verwendung von Gl. (28 a) und (28 b)

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \epsilon_1 E_1^G &= j \omega \frac{\partial G_2}{\partial x_3}, \\ \epsilon_0 \epsilon_2 E_2^G &= -j \omega \frac{\partial G_1}{\partial x_3}, \\ \epsilon_0 \epsilon_3 E_3^G &= -j \omega \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (29 a)$$

$$\begin{aligned} H_1^G &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_3^2} \right), \\ H_2^G &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{\epsilon_3} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_3^2} \right), \\ H_3^G &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (29 b)$$

Die Randbedingungen sind daher

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial G_1}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right\} x_1 = 0, l_1, \quad (30 a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right\} x_2 = 0, l_2, \quad (30 b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\} x_3 = 0, l_3. \quad (30 c)$$

Auf ähnliche Weise wie beim Z-Typ kann man sich überzeugen, daß, will man G_1 und G_2 als Produkte ansetzen, diese notwendig die Form

$$G_1 = \Gamma_1 \sin \alpha_1 x_1 \cos \alpha_2 x_2 \cos \alpha_3 x_3, \quad (31)$$

$$G_2 = \Gamma_2 \cos \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 \cos \alpha_3 x_3$$

haben müssen. Gehen wir damit in die Gl. (28 a) und (28 b) ein, so erhalten wir zwei algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(k_0^2 - \frac{1}{\varepsilon_2} \alpha_1^2 - \frac{1}{\varepsilon_3} \alpha_2^2 - \frac{1}{\varepsilon_2} \alpha_3^2 \right) \Gamma_1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \alpha_1 \alpha_2 \Gamma_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \alpha_1 \alpha_2 \Gamma_1 + \left(k_0^2 - \frac{1}{\varepsilon_3} \alpha_1^2 - \frac{1}{\varepsilon_1} \alpha_2^2 - \frac{1}{\varepsilon_1} \alpha_3^2 \right) \Gamma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

zur Bestimmung von Γ_1 und Γ_2 . Für alle jene Werte von k_0^2 für die die Determinante von Gl. (32) verschwindet, die also der Gleichung

$$\begin{aligned} k_0^4 - k_0^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \frac{1}{\varepsilon_2} (\alpha_3^2 + \alpha_1^2) + \frac{1}{\varepsilon_3} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right\} + \\ + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \left(\frac{\alpha_1^2}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} + \frac{\alpha_2^2}{\varepsilon_3 \varepsilon_1} + \frac{\alpha_3^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

genügen, finden wir als Lösungen

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\varepsilon_1 k_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \right), \quad (34)$$

$$\Gamma_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \alpha_1 \alpha_2. \quad (35)$$

Mit Gl. (31), (34) und (35) können wir nun das elektrische und magnetische Feld des G-Typs explizite darstellen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1^G &= -j \omega \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) a_1 a_2 a_3 \cos a_1^* x_1 \sin a_2 x_2 \sin a_3 x_3, \\
 \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_1^G &= j \omega \frac{a_3}{\varepsilon_1} \left(\varepsilon_1 k_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \right) \sin a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \sin a_3 x_3, \\
 \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3^G &= j \omega \frac{a_2}{\varepsilon_1} \left(\varepsilon_1 k_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \right) \sin a_1 x_1 \sin a_2 x_2 \cos a_3 x_3,
 \end{aligned}
 \tag{36 a}$$

$$\begin{aligned}
 H_1^G &= \frac{\omega^2}{k_0^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_3} \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) a_1^2 a_2^2 + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{\varepsilon_3} a_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} a_3^2 \right) \left(\varepsilon_1 k_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \right) \right\} \sin a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \cos a_3 x_3, \\
 H_2^G &= -\frac{\omega^2}{k_0^2} \frac{a_1 a_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \left\{ \varepsilon_1 k_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a_1^2 - a_2^2 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} a_3^2 \right\} \cos a_1 x_1 \sin a_2 x_2 \cos a_3 x_3, \\
 H_3^G &= -\frac{\omega^2}{k_0^2} \frac{a_1 a_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left\{ \varepsilon_1 k_0^2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} a_1^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} a_2^2 - a_3^2 \right\} \cos a_1 x_1 \cos a_2 x_2 \sin a_3 x_3.
 \end{aligned}
 \tag{36 b}$$

Da die Eigenwerte des Z - und des G -Typs derselben Gleichung zu genügen haben, können wir die zu denselben Parametern gehörigen Felder addieren und die auf diese Weise gewonnene Lösung der MAXWELLSchen Gleichung in der Form

$$\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\} = \{\mathfrak{E}^Z, \mathfrak{H}^Z\} + A \{\mathfrak{E}^G, \mathfrak{H}^G\} \tag{37}$$

anschreiben. A ist dabei eine Anregungskonstante. Nun besitzt die Eigenwertgleichung (20), bzw. (33) zwei Lösungen

$$k_{01}^2 = a + \sqrt{a^2 - b}, \tag{38}$$

$$k_{02}^2 = a - \sqrt{a^2 - b}. \tag{39}$$

so daß wir entsprechend der Gl. (37) für das vorgelegte Problem zwei linear unabhängige Lösungssysteme $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{01}^2}$ und $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{02}^2}$ gefunden haben.

4. Die Vollständigkeit der gefundenen Lösungen.

Um zu einer Aussage darüber zu gelangen, ob es außer diesen beiden Lösungsmannigfaltigkeiten noch weitere Lösungen für unser Problem gibt, bedienen wir uns der Tatsache, daß das vollständige System der Eigenschwingungen für den Fall eines optisch einachsigen Mediums, also für $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ bereits bekannt ist [2]. Wir können nämlich von diesem

Lösungssystem ausgehen und zunächst eine Abweichung von $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0$ als kleine Störung auffassen. Die zu diesem gestörten Problem gehörigen Eigenwerte und Eigenfunktionen müssen dabei, sollen sie physikalisch sinnvoll sein, bei beginnender Störung stetig aus den Eigenwerten und Eigenfunktionen des ungestörten Problems hervorgehen und dabei den Regeln der Störungsrechnung genügen.

Zunächst wollen wir aber den umgekehrten Weg beschreiten und in den obigen Resultaten mit ε_3 gegen ε_2 gehen. Bei den Eigenwerten finden wir, daß k_{01}^2 in

$$k_{01}^2 \Big|_{\varepsilon_3=\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_2} a_1^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} (a_2^2 + a_3^2) \quad (38)$$

und k_{02}^2 in

$$k_{02}^2 \Big|_{\varepsilon_3=\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \quad (39)$$

übergeht. Gl. (38) ist aber gerade die Eigenwertgleichung des elektrischen, Gl. (39) die des magnetischen Types der Eigenschwingungen eines einachsigen anisotropen Mediums. Aus Gl. (21) und (22) ist zu ersehen, daß der Ansatz Gl. (5) für $k_0^2 = k_{01}^2$, also für die Eigenwerte des elektrischen Typs den gewöhnlichen BROMWICH-Ansatz $\mathfrak{Z} = U \mathbf{e}_1$ ergibt, während $k_0^2 = k_{02}^2$ die triviale Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen liefert. Das analoge gilt für den G-Typ: hier geht der Ansatz Gl. (25) für die Eigenwerte des magnetischen Typs in den BROMWICH-Ansatz $\mathfrak{G} = V \mathbf{e}_1$ über, während man für die Eigenwerte des elektrischen Typs die triviale Lösung findet. Daraus folgt natürlich, da die eben besprochenen Übergänge stetig vor sich gehen, daß auch das oben gefundene Eigenfunktionssystem $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{01}^2}$ mit $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_2$ stetig in die Eigenfunktionen des elektrischen Typs, $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{02}^2}$ in die des magnetischen

Typs der optisch einachsigen Medien übergeht. Und zwar derart, daß die bei $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ einer bestimmten Kombination (a_1, a_2, a_3) , bzw. (m, n, ν) zugehörigen Eigenfunktionen in die zur selben Kombination bei $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ gehörigen übergehen. Diese Feststellung ist deshalb wichtig, weil wir dadurch in die Lage versetzt werden, die Eigenwerte als einfach anzunehmen und ihre Abzählung nach den Kombinationen des Zahlentripels (m, n, ν) in den Eigenfunktionen vorzunehmen; Entartungen, etwa auf Grund algebraischer Beziehungen zwischen den a_i , brauchen also nicht berücksichtigt werden. Da nun bei einem Übergang von $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0$ zu $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \neq 0$ diese einfachen Eigenwerte des optisch einachsigen Mediums nicht aufspalten können und auch nach der Störung einfach bleiben müssen, sind außer den oben angegebenen beiden Eigenfunktionssystemen $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{01}^2}$ und $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{02}^2}$ keine weiteren Eigen-

lösungen des vorgelegten Problemes mehr möglich.

Wir können dabei, entsprechend dem oben Gesagten, das Lösungssystem $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{0z}^2}$, das aus dem elektrischen Typ der optisch einachsigen Medien hervorgeht, als einen auf optisch zweiachsige Medien erweiterten elektrischen Typ, und die Lösung $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{H}\}_{k_{0z}^2}$ als erweiterten magnetischen

Typ ansprechen; es ist aber zu beachten, daß diese erweiterten Schwingungstypen im allgemeinen nicht mehr durch das identische Verschwinden einer Feldkomponente in der e_1 -Richtung ausgezeichnet sind.

Meinem geschätzten Lehrer, Herrn Professor Dr. P. URBAN, Vorstand des Institutes für theoretische Physik der Universität Graz, danke ich für die dauernde Unterstützung dieser Arbeit und für wertvolle Hinweise.

Ferner möchte ich Herrn Professor Dr. E. LEDINEGG für manchen Rat und viele Diskussionen danken.

Literatur.

1. E. LEDINEGG: Wiener Ber. **156**, 417 (1947).
2. E. HAFNER: Das vollständige System der elektromagnetischen Eigenschwingungen einachsig anisotroper Hohlraum-Resonatoren, AEÜ im Erscheinen.

Vorbericht über die Herbsttagung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft*.

2. bis 4. Oktober 1952 in Wien.

Versammlungsort: Großer Hörsaal des I. Physikalischen Institutes der
Universität, Wien, IX., Strudlhofgasse 4.

Zusammengestellt von

K. W. F. Kohlrausch, Graz.

Donnerstag, den 2. Oktober 1952.

1. 9 Uhr: Bericht von L. FLAMM: *25 Jahre Wellenmechanik.*

Anschließend Einzelvorträge:

2. J. BOMZE (T. H. Wien): *Über die Möglichkeit der Existenz von konservativen nicht-stationären elektrischen Ladungsbewegungen im Rahmen der klassischen Elektrodynamik.*

Die beiden D'ALEMBERTSchen Lösungen der inhomogenen Wellengleichung, welcher die elektromagnetischen Potentiale genügen müssen, werden auf ihre Bedeutung für den Energieaustausch von elektrischen Ladungen mit ihrem Felde untersucht und es wird gezeigt, daß nur die Zulassung beider Lösungen einen Energieaustausch in beiden Richtungen gestattet.

Die gemeinsame Verwendung der beiden Lösungen gibt damit die Möglichkeit der Existenz von nicht-stationären Ladungsbewegungen ohne Energieabstrahlung.

3. J. BOMZE (T. H. Wien): *Eine Herleitung der Dreh- und Zitterbewegung bewegter elektrischer Elementarladungen aus der klassischen Elektrodynamik.*

In einer Reihe von in den Jahren 1945 bis 1947 veröffentlichten Arbeiten hat Herr Prof. L. FLAMM gezeigt, daß es möglich ist, einen tieferen Einblick in den Mechanismus der elektromagnetischen Erscheinungen und in die Natur der elektromagnetischen Wellen zu gewinnen, wenn man das elektrische Erregungsfeld, die elektrische Feldmaterie, in den Vordergrund der Betrachtungen stellt. Diese elektrische Feldmaterie gehorcht einer neuen, von Prof. FLAMM entwickelten Mechanik, der „Linienmechanik“.

* Die nachstehend mitgeteilten Kurzberichte über die angemeldeten Einzelvorträge wurden von den Autoren zur Verfügung gestellt.

Die Fruchtbarkeit dieser Betrachtungsweise scheint sich nicht allein auf die von Herrn Prof. FLAMM erzielten Ergebnisse zu beschränken. So soll, ausgehend vom Felde der elektrischen Erregungslinien einer bewegten elektrischen Elementarladung, dem „elektrischen Elementarfelde“, gezeigt werden, daß die Bewegung der Elementarladung im allgemeinen von einer Dreh- und Zitterbewegung begleitet ist.

4. W. GLASER und P. SCHISKE (T. H. Wien): *Elektronenoptische Abbildung vom Standpunkt der Wellenmechanik.*

Ausgehend von der SCHRÖDINGER-Gleichung des rotationssymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldes wird die Existenz einer objektähnlichen Abbildung bewiesen. Die Wellenfunktion des paraxialen Bereiches wird dazu für jede beliebige Einstellebene durch den Verlauf der Wellenfunktion in der Objektebene ausgedrückt. Mit Hilfe dieser Lösung der paraxialen SCHRÖDINGER-Gleichung wird gezeigt, daß es unter allen Einstellebenen $z = \text{const.}$ eine bestimmte $z = z_1$ gibt, in welcher bis auf eine Maßstabsänderung die gleiche Stromdichteverteilung der Elektronen wie in der Objektebene herrscht. Der Ort dieser Bildlage und die Vergrößerung stimmen mit den entsprechenden Größen der geometrischen Elektronenoptik überein. Die Abbildung eines Spaltes und der Kreislochblende durch eine bestimmte, typische Magnetlinse läßt erkennen, daß sich in jeder Einstellebene eine FRESNELSche Beugungserscheinung ergibt, deren Beugungssäume mit Annäherung an die Bildebene unbegrenzt zusammenrücken und so den scharfen Bildrand liefern. Der wesentliche Einfluß einer Blende auf die Abbildung wird untersucht und man kommt so aus der SCHRÖDINGER-Gleichung in konsequenter Weise zur Theorie der wellenmechanischen Abbildung bestrahlter Objekte, welche das Analogon zur ABBÉ-RAYLEIGHschen Theorie darstellt. Im Gegensatz zur Lichtoptik spielt in der Elektronenoptik die Abbildung von Phasenobjekten die beherrschende Rolle. Schließlich wird das Problem der Modifikation der Wellengleichung durch das elektrisch-magnetische Abbildungsfeld für das nicht-paraxiale Gebiet in Angriff genommen, indem das wellenmechanische Analogon zur KIRCHHOFFschen Formel für die SCHRÖDINGER-Gleichung im felderfüllten Raum aufgestellt wird. Auf diese Weise ergibt sich eine Theorie des wellenmechanischen Einflusses der „Bildfehler“ auf die Abbildung.

5. H. GRÜMM (T. H. Wien): *Die Eigenladungsverbreiterung fokussierter Elektronenbündel vom Standpunkt der Wellenmechanik.*

Für die praktische Elektronenoptik ist es wichtig zu wissen, wie groß der abbildungsverschlechternde Einfluß ist, der durch die Wirkung der im Elektronenbündel fliegenden Ladungen erzeugt wird. Die bisherigen Arbeiten über die Eigenladungs-Verbreiterung von Elektronenbündeln sind von geometrisch-optischen Gesichtspunkten ausgegangen. In den Vereinigungsgebilden von Elektronenbündeln (Kaustikfläche, Brennpunkte) treten jedoch Abweichungen der Intensitätsverteilung von den geometrisch-optischen Verhältnissen auf, die die Eigenladungseffekte größenordnungsmäßig weit übersteigen. Es ist daher angezeigt, von einer durch die Wellenmechanik bestimmten Struktur des Elektronenbündels auszugehen, wie sie von W. GLASER und seinen Mitarbeitern für verschiedene typische Anordnungen ermittelt worden ist. Der Grundgedanke besteht darin, die wellenmechanische Raumladungsverteilung, wie sie sich ohne Berücksichtigung der Bündelladung ergibt, zu den „äußeren“ Abbildungsfeldern als eine Art Raumladungslinse dazuzuschlagen und das wellenmechanische Problem unter diesen veränderten Bedingungen erneut durchzurechnen. Auf diese Weise gelangt man

zu Näherungsformeln und Abschätzungen für die verschiedenen Raumladungseffekte, wie Verschiebung der GAUSS'schen und der FRAUNHOFERSchen Ebene und Veränderung des Bündeldurchmessers. Interessant ist, daß die Bündelladung bei geringen Vergrößerungen, vor allem aber bei Verkleinerungen (Kondensorlinse, Konzentrierspule) zu einer Verkleinerung des Bildflecks in der GAUSS'schen Bildebene führt, was den Absichten des praktischen Elektronenoptikers entgegenkommt.

6. P. SCHISKE (T. H. Wien): *Strenge Durchrechnung einer typischen elektrostatischen Einzellinse.*

Im Gegensatz zu magnetischen Elektronenlinsen ist es bisher noch nicht gelungen, ein streng durchrechnbares elektrostatisches Abbildungsfeld anzugeben, das den tatsächlichen Feldverlauf in praktisch verwendeten Einzellinsen mit genügender Genauigkeit wiedergibt. Das mehrfach in der Literatur angegebene und numerisch behandelte Feld

$$\Phi(z) = U_0 + \frac{U_1 + \frac{z U_2}{a}}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}$$

gestattet, wie hier gezeigt wird, die strenge Berechnung der Paraxialbahnen. Das diesem Achsenpotential entsprechende räumliche Potential läßt sich streng angeben. Die zugehörige Eikonalgleichung (HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung) läßt sich durch Separation integrieren, womit auch die Bildfehler beliebig hoher Ordnung dieser Elektronenlinse im Prinzip bekannt sind.

Die Paraxialbahnen und das Eikonal können mit Hilfe von elliptischen Funktionen in geschlossener Form ausgedrückt werden. Die Methode beruht darauf, daß die Aufgabe auf das Zwei-Zentrenproblem der Mechanik zurückgeführt wird.

7. G. EDER (U. Wien): *Spin-Bahn-Kopplung nach der pseudoskalaren Theorie.*

Bei bestimmten Proton-, bzw. Neutronenzahlen im Atomkern treten besonders große Bindungsenergien auf; diese „magischen Zahlen“ können durch die Annahme einer Spin-Bahn-Kopplung erklärt werden. Nach der vektoriellen Meson-Theorie ergibt sich eine solche in der gewünschten Größenordnung. Da aber die π -Mesonen, welche für eine starke Wechselwirkung mit Nukleonen in Frage kommen, pseudoskalar sind, so muß dieser Fall betrachtet werden. H. GAUSS konnte nun zeigen, daß die zweite störungstheoretische Näherung keinen Beitrag zur Spin-Bahnkopplung liefert. Die Näherung vierter Ordnung in der Kopplungskonstanten liefert einen solchen Beitrag. Man erhält ihn dadurch, daß das Wechselwirkungspotential aus dem Matrixelement für die Streuung von Nukleonen an Nukleonen berechnet wird.

8. H. ROBL (U. Wien): *Die Wechselwirkung von Elektronen und Lichtquanten im homogenen Magnetfeld.*

Mit Hilfe der exakten Eigenfunktionen der SCHRÖDINGER-Gleichung und DIRAC-Gleichung für Elektronen im homogenen Magnetfeld wird die Wechselwirkung mit Lichtquanten in erster Näherung behandelt. Der Bericht umfaßt: 1. Die Emission von Lichtquanten durch schnelle Elektronen und Vergleich der wellenmechanischen Ergebnisse mit der klassischen Theorie. 2. Die Streuung

von Lichtquanten an Elektronen und die Verbreitung der COMPTON-Linie zu einem Spektralband. 3. Die Paarerzeugung durch Lichtquanten. 4. Die Beeinflussung der Zweiquanten-Paarvernichtung durch ein homogenes Magnetfeld.

9. K. BAUMANN (U. Wien): *Mottische und Möllersche Streuung in den neuen Strahlungstheorien.*

Bei der Behandlung des Stoßes zweier Elektronen mit der neuen SCHWINGER-FEYNMANSchen Quantenelektrodynamik bestätigt sich in niedrigster Näherung die MÖLLER-Formel. In der nächsten Näherung treten bereits komplizierte FOURIER-Integrale auf. Hier kann man sich die Analogie des Prozesses zu dem der Streuung eines Elektrons an einem Atomkern zunutze machen und dadurch wenigstens zu einer teilweisen Durchrechnung gelangen. Und zwar gewinnt man so jenen Teil, der den strahlungstheoretischen Korrekturen zur MOTT-Streuung $\sim (Z\alpha)^2$ entspricht, nicht aber den der zweiten BORNSchen Näherung entsprechenden Beitrag. Während eine in den strahlungstheoretischen Korrekturen zur MOTT-Streuung enthaltene Infrarotkatastrophe durch eine entgegengesetzt gleiche in den Strahlungsverlusten genau kompensiert wird, ist dies bei der MÖLLER-Streuung nicht so. Doch kann die Kompensation noch durch die zweite BORNSche Näherung erfolgen. Für sehr hohe Energien sollte die zweite störungstheoretische Näherung die erste überwiegen, die Bedeutung dieser Feststellung wird allerdings durch ihr bloß logarithmisches Anwachsen vermindert.

10. P. URBAN und E. LEDINEGG (U. Graz): *Über die Nullpunktsuszeptibilität einer linearen Atomkette.*

Die paramagnetischen Eigenschaften eines Kristalles erklärt man seit HEISENBERG aus der Spinwechselwirkung der Elektronen benachbarter Atome. Das mathematisch am einfachsten zu behandelnde Modell stellt die lineare Atomkette dar. Im Sinne der Störungsrechnung erster Ordnung erhält man aus der nichtrelativistischen Wellengleichung einer aus N-Atomen bestehenden Konfiguration den Wechselwirkungsoperator im Spinraum, dessen Eigenwertspektrum das magnetische Verhalten der Kette charakterisiert. Für eine große Anzahl von Atomen läßt sich die Eigenwertverteilung aus einer linearen Integralgleichung, welche von HULTHÉN stammt, berechnen. Die Integration der angeführten Integralgleichung wurde jedoch nicht von HULTHÉN durchgeführt, welcher die Verteilung der Eigenwerte um den tiefsten Energiewert nach einer statistischen Methode berechnet. Auf diese Weise ergibt sich ein endlicher und von der magnetischen Feldstärke unabhängiger Wert der Nullpunktsuszeptibilität. Im Gegensatz dazu liefert die asymptotische Berechnung des Eigenwertspektrums auf Grund der Integralgleichung eine von H abhängige Nullpunktsuszeptibilität, welche für ein verschwindendes äußeres Magnetfeld den Wert Null annimmt.

Da die Integralgleichungsmethode für eine genügend große Atomzahl ein strenges Rechenverfahren darstellt, während die statistische Methode unter der gleichen Voraussetzung stets Näherungswerte liefert, dürften die aus der HULTHÉNSchen Integralgleichung gewonnenen Ergebnisse von Interesse sein.

15 Uhr: Fortsetzung.

11. F. GABLER (T. H. Wien): *Zur Frage der schiefen Beleuchtung in der Auflicht-Mikroskopie.*

In der Auflichtmikroskopie wird häufig die sogenannte Relief-Beleuchtung verwendet um Einzelheiten im Objekt besser sichtbar zu machen, die mit normaler

Hellfeldbeleuchtung nur undeutlich oder gar nicht herauskommen. Bei dieser Beleuchtungsart wird das Licht dem Objekt, je nach der Objektivapertur, unter mehr oder weniger großen Einfallswinkeln zugeführt. Üblicherweise wird das entstehende Bild als Schattenwurf des Reliefs gedeutet. Dies ist jedoch unzutreffend. Die entstehenden Bildkontraste sind vielmehr nur darauf zurückzuführen, daß die Beugungsfigur wegen der Neigung des Beleuchtungsstrahlenbündels nicht zur Mikroskopachse symmetrisch liegt und daher einseitig beschnitten wird. Aus der ABBÉschen Theorie der Abbildung ist aber bekannt, daß diese Unsymmetrie der schiefen Beleuchtung Bilder verursacht, die dem Schattenwurf eines Reliefs vergleichbar sind. Dieser theoretische Befund läßt sich experimentell ganz einfach verifizieren, wie an Hand von Mikrophotos gezeigt wird. Auch zeigen interferometrische Messungen, daß das Relief z. B. eines guten Metallschliffes viel zu flach ist, um einen Schattenwurf meßbarer Breite zu erzeugen. Eine für diese Messung geeignete, überaus einfache und als Zusatz zu einem gewöhnlichen Metallmikroskop passende Interferenzeinrichtung wird beschrieben.

12. K. LANG (T. H. Wien): *Die spektrale Energieverteilung von Emissionslinien bei verschiedenen Entladungsbedingungen.*

Auf Grund interferometrischer Messungen der Intensitätsverteilung von Emissionslinien bei Anregung einer Neonentladung mit Gleichspannung, technischer Wechselspannung von 50 Hz und hochfrequenter Wechselspannung von 23 MHz wird gezeigt, daß bei gleichem Gasdruck und gleicher Ausstrahlungsintensität die spektrale Energieverteilung der Neonlinie 5852,49 unabhängig von den Entladungsbedingungen stets dieselbe ist. Der Apparateeinfluß wird durch Steigerung des Auflösungsvermögens, bzw. durch FOURIER-Entwicklung ausgeschaltet. Die Unsymmetrie der Intensitätsverteilung kommt durch das Zusammenwirken der Isotope Ne^{20} und Ne^{22} zustande. Es werden ferner Messungen der Intensitätsverteilung der Linie 5852,49 bei verschiedenen Gasdrücken angegeben und mit der berechneten Intensitätsverteilung verglichen. Bei geringem Druck (1 Torr) ist die Intensitätsverteilung vorwiegend durch den DOPPLER-Effekt bestimmt, bei großem Druck (100 Torr) durch die Stoßdämpfung. In Übereinstimmung mit der Stoßdämpfungstheorie nimmt die Halbwertsbreite aller untersuchten Neon- und Argonlinien proportional mit der Gasdichte zu. Es wird besonders auf die starke Eigendruckverbreiterung einer Liniengruppe des Neon- und des Argonspektrums aufmerksam gemacht. Alle Linien, die bei einem auf dem s_2 -Niveau endenden Elektronenübergang emittiert werden, zeigen eine bedeutend größere Druckverbreiterung als die übrigen Linien.

13. R. GEBAUER (Darmstadt) und E. KREYSSIG (Tübingen): *Über die Erzeugung lichtstarker Kanalstrahlen.* (Vorgetragen von R. GEBAUER.)

Die geringe Leuchtdichte der üblichen Kanalstrahlentladung hat die Untersuchung vieler Fragen bis jetzt sehr erschwert oder überhaupt unmöglich gemacht. Es erschien daher von Interesse eine Erhöhung der Leuchtdichte durch die Verwendung zusätzlicher ionenoptischer Hilfsmittel zu versuchen. Solche Untersuchungen wurden bei Variation der Versuchsbedingungen für zwei Typen von Kanalstrahlrohren durchgeführt. Dabei zeigte sich beim Ganzmetallrohr infolge zusätzlicher Ionenoptik eine Steigerung der Leuchtdichte auf das Doppelte gegenüber einem Glasrohr der üblichen Bauart von gleichem Rohr- und Kanaldurchmesser.

14. R. GEBAUER (Darmstadt): *Über die Ventilwirkung eines inhomogenen elektrischen Feldes auf die im Felde emittierten Lichtquanten.*

Die Lichtemission von Wasserstoff-Kanalstrahlen wurde im elektrischen Felde in entgegengesetzten Richtungen gleichzeitig untersucht. Lang- und kurzwellige Komponenten besitzen nur dann dieselbe Linienbreite, wenn das elektrische Feld homogen ist. Bei inhomogenem Feld hingegen ist die Halbwertsbreite der kurzwelligen von derjenigen der langwelligen Komponenten verschieden. Für die Strahlung in Richtung zunehmender Feldstärke sind die kurzwelligen Komponenten breiter als die entsprechenden langwelligen. Die gleichzeitige Beobachtung in der anderen Richtung ergibt genau das umgekehrte Verhalten. Wie bei früheren Untersuchungen gelangt man zu dem Resultat, daß ein inhomogenes elektrisches Feld als Ventil für die im Felde emittierten Photonen wirkt.

15. R. HERZOG (U. Wien): *Über einen neuen Massenspektrographen hoher Empfindlichkeit.*

Es wird ein Massenspektrograph beschrieben, bei dem durch besondere Felder die Intensität, die üblicherweise entlang einer Spektrallinie verteilt ist, in einem Punkt konzentriert wird. Es werden Aufnahmen gezeigt, die das auf Grund theoretischer Überlegungen erwartete Verhalten der neuen Anordnung bestätigen.

16. J. A. SCHEDLING (U. Wien): *Die Anwendung der Differentialthermoanalyse zur Quarzgehaltsbestimmung pulverförmiger Substanzen.*

Zu den bereits bekannten Verfahren der Mineralanalyse hat sich in den letzten Jahrzehnten ein neues, allem Anschein nach vielversprechendes, die differentialthermische Analyse, gesellt. Grundsätzlich beruht dieses Verfahren auf der Tatsache, daß bei Erwärmung einer Substanz in den meisten Fällen eine Änderung ihrer physikalischen und chemischen Eigenschaften auftritt und bei bestimmten, für die Substanz charakteristischen Temperaturen auch eine außergewöhnliche Wärmeaufnahme oder Wärmeabgabe in Erscheinung tritt. Diese absorbierte oder freiwerdende Energie kann sowohl zur Identifizierung der Substanz als auch gegebenenfalls zur Bestimmung ihrer Menge in Substanzgemischen dienen.

An Hand einiger Beispiele werden die Anwendung der differentialthermischen Methode auf die Bestimmung des Quarzgehaltes pulverförmiger Substanzen sowie die Eigenarten und Grenzen des Verfahrens und die Methoden der Auswertung der erhaltenen Meßergebnisse besprochen.

17. E. WOTAVA (U. Wien): *Fluoreszenzmikroskopische Untersuchungen stark zerkleinerter Mineralien.*

Die üblichen Methoden zur Identifizierung der Mineralbestandteile feinkörniger Gemenge führen nicht immer zu eindeutigen Ergebnissen, da einerseits im Bereich der geringen Partikelgrößen die Unterscheidung nach Brechzahl und Doppelbrechung nicht mehr genau durchführbar ist, andererseits bei Röntgeninterferenz-aufnahmen Linienkoinzidenzen auftreten können. Als Ergänzung eignet sich infolge der Einfachheit die Anfärbung mit Fluorochromen. Diese kann entweder direkt in wässrigen Lösungen oder nach Vorbehandlung mit Säuren erfolgen. Bei Untersuchungen von Staubproben konnten damit gute Ergebnisse erzielt werden, insbesondere bei sinngemäßer Kombination mehrerer Verfahren.

Es wird weiters auf die Verwendungsmöglichkeit der Fluoreszenzmikroskopie bei Flugstaubuntersuchungen hingewiesen.

17.30 Uhr: Gemeinsam mit der Chemisch-Physikalischen Gesellschaft in Wien:

18. J. EGGERT (E. T. H. Zürich): *Der heutige Stand und die Probleme der Farbphotographie.*

Abends: Vorstandssitzung für die Vorstandsmitglieder im Institut für Radiumforschung.

Freitag, den 3. Oktober 1952.

19. 9 Uhr: Bericht von H. MACHE: *Über die Flamme.*

Anschließend Einzelvorträge:

20. F. BRANDSTAETTER (T. H. Wien): *Die Diffusion von Gasbläschen in Flüssigkeiten.*

Zur raschen Bestimmung des Diffusionskoeffizienten von Gasen in Flüssigkeiten hatte H. MACHE im Jahre 1929 eine Bläschenmethode entwickelt, bei der es sich darum handelt, ein in eine gasgesättigte Flüssigkeit eingebrachtes Gasbläschen durch einen plötzlichen Überdruck zum Verschwinden zu bringen. Hierbei wird dauernd die Abnahme des Bläschenradius in bestimmten Zeitintervallen bis zum völligen Verschwinden des Bläschens kontrolliert.

Die Untersuchungen, die mit außerordentlich hochgetriebener Reinheit der Flüssigkeit und Präzision durchgeführt werden mußten, zeigten eine scheinbare Abhängigkeit der so ermittelten Diffusionskoeffizienten vom Bläschenradius. Weitere Untersuchungen mit Wasser, das Spuren von gelösten Gasbestandteilen enthielt, sowie mit Lösungen von Harnstoff, Zucker und Schwefelsäure bis höchstens 0,1 Molarität lassen die Vermutung aufkommen, daß die Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten vom Bläschenradius als Oberflächeneffekt zu werten ist, da der Durchgang des Gases durch die Bläschenoberfläche durch die in der Flüssigkeit gelösten Substanzen individuell beeinflußt wird.

21. H. STAMPFER (T. H. Wien): *Zur Frage der Erhaltung von Flammen explosibler Gasgemische am Brennerrohr.*

Einleitend soll dargelegt werden, daß die aufrechte Bunsenflamme, deren flächenartige Reaktionszone (Brennfläche) mit einer von der Zusammensetzung des Brenngases abhängigen Verbrennungsgeschwindigkeit sich in das unverbrannte frei ausströmende Gemisch hinein bewegt, von ihrer stationären Berandung her ergänzt werden muß um sich erhalten zu können. Es soll sodann über zwei verschiedene Erklärungen der Entstehung dieser stationären Berandung berichtet werden. Abschließend sollen diese beiden Standpunkte unter Anführung bekannten experimentellen Materials, bzw. letzter einschlägiger Versuche über die Funktion des Druckes in der Flamme, verglichen werden.

22. W. KOZAK (T. H. Wien): *Die Verbrennungsgeschwindigkeit von Gas-Luft-Gemischen an den Zündgrenzen.*

Da bis jetzt Werte der Verbrennungsgeschwindigkeit, die unterhalb 20 bis 10 cm/sek liegen, für die meisten Brenngase kaum beobachtet wurden (wegen des Abhebens der aufrechten Bunsenflamme vom Brenner, bzw. eindiffundierender Außenluft), wird das Verfahren, das auf Anwendung der verkehrten Kegel-

flamme (hinter einem Staupunkt auf einer Düse brennend), das sowohl die Lage der Zündgrenzen (in einem bestimmten Fall) als auch die Verbrennungsgeschwindigkeit in ihrer Nähe zu messen gestattet, erwünscht sein. Dabei wurde an der unteren Zündgrenze ein H_2 -, an der oberen ein O_2 -Zündflämmchen verwendet und an der oberen mit Hilfe einer Doppeldüse die Flamme durch einen N_2 -Strom vor Außenluft geschützt. (Blieb ohne Einfluß auf die Messungen.) Die Formel der Verbrennungsgeschwindigkeit wird angegeben und ein Kriterium für das Erreichen der Zündgrenze entwickelt (Kegelöffnungswinkel 0 Grad — zylinderförmige Brennfläche — entspricht Zündgrenze). Mit aufrechten Bunsen- und verkehrten Kegelflammen ist es erstmals gelungen, eine vollständige Kurve Verbrennungsgeschwindigkeit/Prozent Gas im Gemisch anzugeben. Es wurde erkannt, daß die Verbrennungsgeschwindigkeit an den Zündgrenzen mit Null beginnt und ziemlich steil zu den bisher bekannten Werten des Mittelstückes der Kurve ansteigt.

23. E. SKUDRZYK (T. H. Wien): *Die innere Reibung fester Körper.*

Eine allgemeingültige Behandlung der inneren Reibung eines festen Körpers erfordert wegen der elastischen Nachwirkung die Kenntnis der gesamten Vorgeschichte der Bewegung und die aller Einzelheiten des innermolekularen Aufbaues des Stoffes. Durch Übergang zur FOURIER-Darstellung des Vorganges verlegt man die Verantwortung für die Vorgeschichte des Stoffes auf die FOURIER-Komponenten der Bewegung und vereinfacht so die Aufgabe auf das Studium der inneren Reibung für rein harmonische Schwingungen. In diesem Fall läßt sich dann der Einfluß der inneren Struktur des Stoffes durch zwei frequenzabhängige komplexe Elastizitätskonstanten streng berücksichtigen und so die von der Art der Deformationsbewegung abhängigen inneren Reibungskonstanten mit der die Bewegung beschreibenden Elastizitätskonstanten zusammenfassen. Schließlich kann man zeigen, daß die innere Reibung fester Körper auf elastische Nachwirkung, mechanische Hystereseerscheinungen und plastisches Fließen zurückzuführen ist und daß jede dieser Komponenten an einem für sie charakteristischen Frequenzgang erkannt werden kann.

24. E. LEDINEGG (U. Graz): *Zur Theorie der Bandfilter im cm-Wellengebiet.*

Während die Theorie der Bandfilter für längere Wellen schon seit langem als prinzipiell abgeschlossen gelten kann, trifft dies im Gebiete der cm-Wellen in diesem Umfange nicht zu und erklärt sich durch die Unmöglichkeit einer allgemeinen Integration der MAXWELLSchen Gleichungen.

Unter der in der Praxis im allgemeinen geltenden Voraussetzung schwach gekoppelter Systeme läßt sich jedoch, unter Verzicht auf ein quasistationäres Ersatzschaltbild, mittels einer passend durchgeführten Störungsrechnung erster Ordnung die Durchlaßbreite eines cm-Wellen-Bandfilters allgemein erfassen, was im wesentlichen auf die Bestimmung der zum Durchlaßbereich gehörigen Resonanzfrequenzen des Systems herauskommt. Prinzipiell lassen sich folgende Systeme mit steiflankiger Bandfilterwirkung unterscheiden.

1. Die Bandfilterwirkung wird nur durch einen Hohlraum, in welchem N Eigenschwingungen zum gleichen Eigenwert simultan existieren (Fall der Entartung), hervorgerufen.

2. Die Bandfilterwirkung wird durch ein System von N Hohlraumresonatoren, deren individuelle Frequenzspektren im entkoppelten Zustand in einer Eigenfrequenz übereinstimmen, erzeugt.

3. Das System von N Hohlräumen besitzt im entkoppelten Zustand N voneinander verschiedene, benachbarte Eigenfrequenzen.

In allen drei genannten Fällen werden die durch energetische Wechselwirkung hervorgerufenen Frequenzaufspaltungen mittels einer Säkular determinante beschrieben, deren Elemente Energieterme darstellen, welche durch die Kopplungsart vollständig bestimmt sind.

25. E. HAFNER (U. Graz): *Über die Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen aus dem Eigenwertspektrum anisotroper elektromagnetischer Hohlraumresonatoren.*

Es wird die vollständige Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen im Inneren eines energetisch abgeschlossenen einachsigen Kristalles (in Form eines beliebigen geraden Zylinders) angegeben, dessen Indexellipsoid um die Zylinderachse Rotationssymmetrie besitzt. Die Diskussion der Eigenwertgleichungen eines kreiszylindrischen Hohlraumresonators, in den eine plattenförmige Probe eines einachsigen Kristalles bodenparallel eingebracht ist, zeigt eine Reihe von Möglichkeiten, aus dem Eigenwertspektrum die Dielektrizitätskonstanten zu ermitteln. Eine weitere Lösungsmannigfaltigkeit der MAXWELLSchen Gleichungen im Inneren eines zweiachsigen Kristalles, bei dem die Hauptachsen des Indexellipsoides den Kanten des ihn begrenzenden Parallelepipedes gleichgerichtet sind, wird erwähnt. Abschließend werden einige Anwendungsmöglichkeiten der Messung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen im cm-Wellenbereich in der Molekül- und Festkörperphysik diskutiert.

26. F. REDER (U. Graz): *Mikrowellen-Feldzusammenbruch in reinem Helium.*

Die Verwendung von Mikrowellenfeldern ($\lambda = 10$ cm) in gasgefüllten metallischen Hohlräumen zur Einleitung einer Gasentladung gestattet es, die im allgemeinen sehr verwickelten Vorgänge bei der Zündung physikalisch sehr übersichtlich zu deuten, da in einem weitem Druckbereich alle sekundären Prozesse vernachlässigt werden dürfen und zahlreiche weitere Vereinfachungen möglich sind.

Es wird gezeigt, wie man unter solchen Annahmen die BOLTZMANNsche Transportgleichung für die Elektronenverteilungsfunktion integrieren kann und zu experimentell überprüfbaren Beziehungen: $E = E(p)$ kommt. (E = Zündfeldstärke, p = Gasdruck.)

Der Aufbau der Meßapparatur wird besprochen und die Grenzen der Theorie sowie die theoretischen und experimentellen Ergebnisse werden diskutiert.

Helium ist für diese Untersuchungen deshalb besonders gut geeignet, weil die über einen sehr großen p -Bereich konstante Stoßfrequenz: Elektron-Atom die oben erwähnte Integration erheblich vereinfacht.

27. E. REEGER (U. Wien): *Die Photophorese.* (Eine Übersicht.)

Zur Zeit der Entdeckung der Photophorese durch EHRENFELDT an Teilchen der Größenordnung 10^{-5} cm war nur zwischen lichtpositiver und lichtnegativer Photophorese zu unterscheiden. Die Entwicklung in späterer Zeit (insbesondere auch die Beobachtungen der letzten Jahre an Teilchen der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-2} cm) ließen eine größere Vielfalt des ganzen Erscheinungsgebietes erkennen, die eine entsprechend erweiterte Terminologie erfordert. Neben der „reinen Photophorese“, die durch das Licht allein zustande kommt, gibt es noch eine

„Feldphotophorese“, für die neben dem Licht noch ein Feld (elektrisches, magnetisches, Schwerfeld) erforderlich ist: Elektrophotophorese, Magnetophotophorese, Gravitophotophorese. Besonders interessant sind die stationären Bahnen größerer Teilchen in konvergenten oder divergenten Lichtstrahlen.

28. E. DESOYER (U. Wien): *Die Erscheinungen der Gravitophotophorese.*

Es werden experimentelle Resultate von Untersuchungen der Gravitophotophorese (Bewegungen freischwebender, beleuchteter Probekörper, die nach der Schwerkraft orientiert sind), insbesondere an großen Teilchen (0.1 bis 1 mm) beschrieben.

29. H. ROHATSCHKE (U. Wien): *Über reine Photophorese und Gravitophotophorese.*

Es werden die Analogien der reinen Photophorese und der Gravitophotophorese und die Zusammenhänge der beiden Erscheinungen besprochen. Die Abhängigkeit der Richtung der photophoretischen Kraft an einem Körper von dessen Orientierung wird mit den sich daraus ergebenden Konsequenzen diskutiert.

30. O. PREINING (U. Wien): *Einige quantitative Untersuchungen über Magnetophotophorese.*

Mißt man die magnetophotophoretische Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke, so ergibt sich im allgemeinen ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen beiden Größen. Nach diesem kann man die magnetophotophoretischen Teilchen in fünf Gruppen einteilen; ferner ist er bei manchen Probekörpern, den variablen, von der magnetischen Vorbehandlung stark abhängig. Eine größere statistische Untersuchung zeigt außerdem, daß die Magnetophotophorese auf Ferromagnetika beschränkt ist. Es gelingt noch bei Feldern von nur 0,005 Oersted, an manchen Teilchen eine magnetophotophoretische Bewegung nachzuweisen.

15 Uhr: *Jahreshauptversammlung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft.*

Samstag, den 4. Oktober 1952.

31. 9 Uhr: Bericht von A. SMEKAL (U. Graz): *Über die Grenzen des idealen Kristallgitterbaues.*

Das Zusammenbestehen strukturunempfindlicher und strukturempfindlicher Kristalleigenschaften hat schon frühzeitig erkennbar gemacht, daß die wirklichen Kristalle bestimmte Mikrostrukturen besitzen, in denen neben ideal gebauten Gitterbereichen Baufehler aller Art vorhanden sind (SMEKAL 1927). Die Möglichkeit grundsätzlicher Ursachen des Fehlbaues (SMEKAL 1933) ist von verschiedenen Seiten neuerdings wiederum erörtert worden (z. B. M. BORN 1946, 1951, W. G. BURGERS 1947, 1948). Zu ihrer Beurteilung kann gegenwärtig ein umfangreiches Tatsachenmaterial herangezogen werden.

Der Fehlbau von Salz- und Metallkristallen nimmt mit steigender Entstehungstemperatur und Wachstumsgeschwindigkeit zu, wodurch als Ursachen nach wie vor Wärmeschwankungen und Fremdatomgehalte im Vordergrund stehen. Dies wird auch durch den Vergleich mechanischer Eigenschaften von stoffgleichen

Kristallen und Glaszuständen wahrscheinlich gemacht. Hochsymmetrische Kristalle sind den genannten Faktoren in besonderem Maße ausgesetzt, während das Verhalten von Schichtstrukturen einen gegenteiligen Einfluß von Gittertyp und chemischer Bindungsart nahelegen. Die bisher versuchten theoretischen Ansätze zur Begründung bestimmter Abmessungen von Blockstrukturen vermögen der angedeuteten Mannigfaltigkeit von Einflüssen keine Rechnung zu tragen; auch konnten sie nicht zu zwingender Beweisführung verdichtet werden.

Ein unmittelbarer Zugang zu den Abmessungen und Wechselbeziehungen ideal gebauter Gitterbereiche konnte neuerdings durch Untersuchungen über das mechanische Verhalten kleinster Kristallvolumina gewonnen werden (KLEMM u. SMEKAL 1941, 1951, PUCHEGGER u. SMEKAL 1951, 1952). Die bisher geprüften Kristallarten verlieren innerhalb fehlbaufreier Stoffbereiche ihre Sprödigkeit, Spaltbarkeit oder Verzwillingungsfähigkeit, wahrscheinlich auch ein Verformungsvermögen durch Gleitebenenbildung. Die Aufsuchung der Übergänge zum Normalverhalten spricht auch hier für unterschiedliche Einflußnahme von Gittertyp und chemischer Bindungsart auf die Grenzen des idealen Kristallgitterbaues.

Anschließend Einzelvorträge:

32. A. STARZACHER (U. Graz): *Athermische Plastizität der festen Oxydgläser.*

KLEMM und SMEKAL haben 1941 gezeigt, daß bei Anwendung kleiner Belastungen und Kontaktflächen bruchfreie Ritzspuren erhalten werden, so daß die normale Sprödigkeit der Oxydgläser auf nicht allzu kleine Stoffbereiche beschränkt ist. Die Sonderstellung der bruchfreien Formänderungen wurde darauf zurückgeführt, daß innerhalb kleinster Stoffbereiche eine unmittelbare mechanische Überwindung der chemischen Bindekräfte stattfinden soll (SMEKAL 1942).

Zur Überprüfung dieser Vorstellungen sind der Kraftbedarf, die Temperaturabhängigkeit und der Einfluß der Ziehgeschwindigkeit auf die Furchentiefe bruchfreier Ritzvorgänge untersucht worden. Als Ritzwerkzeug diente zur Ausschaltung störender Reaktionserscheinungen eine VICKERS-Diamantpyramide. Für den spezifischen Kraftbedarf von 15 g- und 30 g-Spuren auf gewöhnlichem Objektträgerglas ergab sich senkrecht zum Furchenquerschnitt übereinstimmend $1,3 \text{ g}/\mu^2$ oder $130\,000 \text{ kg}/\text{cm}^2$, was mit der Größenordnung der molekularen Bindekräfte übereinstimmt. Die bisher ausgeführten Ritzversuche bei 300° und 500° C zeigten gleiche Ritztiefen wie bei Raumtemperatur, so daß die bruchfreien Formänderungen des Glases von der Wärmebewegung primär praktisch unabhängig sind. Die Ritzgeschwindigkeit konnte im Verhältnis $1 : 4 \cdot 10^7$ verändert werden und ergab desto größere Ritztiefen, je kleiner die Ritzgeschwindigkeit.

Die nähere Diskussion der Versuchsergebnisse bestätigt, daß die beschriebenen bruchfreien Formänderungen der Gläser im wesentlichen durch unmittelbare athermische Überwindung der molekularen Bindekräfte zustandekommen.

33. F. PUCHEGGER (U. Graz): *Erzwungene Stoffwanderung auf Calcit- und Dolomit-Spaltflächen.*

Durch Versuche von W. KLEMM und A. SMEKAL ist bereits 1941 gezeigt worden, daß auf Kristallen großer Härte wie Quarz und Korund bruchfreie Ritzbahnen erhalten werden können. Gleichartige erzwungene Stoffverschiebungen ließen sich auch auf Rhomboeder-Spaltflächen der wesentlich weicheren Kristallarten Calcit und Dolomit nachweisen. Bei Verwendung von Diamantwerkzeugen und Ritzlasten unter der Größenordnung 1 g konnten bruchfreie Ritzspuren in be-

liebig Orientierung hergestellt werden. Die durch den Ritzvorgang verdrängten Stoffmengen bilden auch hier zu beiden Seiten der Ritzfurchen wallartige Erhöhungen, welche infolge innerer Spannungen häufig nachträglich zerspringen oder in Form vielfach gewendelter „Locken“ getrennt werden. Das verdrängte Material dürfte demnach amorphisiert sein. Dafür spricht an Kalkspalt ferner, daß Anätzen mit hochverdünnter Essigsäure zu bevorzugter Abtragung der „Wälle“ führt. Die auf Dolomit geritzten bruchfreien Spuren ließen zum Teil Kristallisationserscheinungen erkennen.

Der Einfluß der Ritzorientierung auf das Spurprofil wurde näher untersucht. Die große Anisotropie der mineralogischen Härte des Calcits besonders für die Ritzrichtungen parallel zur kürzeren Rhombendiagonale tritt an den bruchfrei geritzten Spuren nicht auf. Die Anisotropie des Dolomitgitters äußert sich dagegen bei der erzwungenen Stoffwanderung in einer von der Ritzrichtung abhängigen verschiedenen Asymmetrie der Spurprofile:

Die Beschaffenheit der ersten, bei größeren Ritzlasten auftretenden Bruchbildungen erlaubt Rückschlüsse auf die räumliche Verteilung jener Inhomogenitätsstellen, von denen Rhomboeder-Spaltung und beim Calcit auch Zwillingsbildung ihren Ausgang nehmen. Die bruchfreien Ritzspuren belegen, daß Spaltbarkeit und Zwillingsbildung keine Eigenschaften idealer Gitterbereiche darstellen.

34. A. SZEKELY (U. Graz): *Über den Einfluß von Wechselladungen auf die positiven Raumladungsschichten in einem Plasma.*

Wird das Gitter einer Gastriode auf einem gegen Kathode negativen Potential gehalten, so umgibt es sich, nachdem die Entladung gezündet hat, mit einer positiven Raumladungsschicht, so daß schon in geringer Entfernung vom Gitter das Entladungsplasma ungestört ist. Mit einem konstanten negativen Gitterpotential kann daher kein Einfluß auf die fertig aufgebaute Entladung ausgeübt werden.

Verbindet man aber das Gitter über einen hohen Widerstand mit der Kathode und legt an die Strecke Gitter-Kathode eine Wechselladung, so nimmt das Gitter ein im Mittel negatives Potential an, das aber mit der Frequenz der Wechselladung schwankt. Das führt dazu, daß auch in der gezündeten Entladung das Gitter einen Einfluß auf das Plasma ausüben und die Entladung löschen kann. Es ist anzunehmen, daß die positive Raumladungsschicht um das Gitter nicht mehr ungestört zur Ausbildung kommt, falls Amplitude und Frequenz der überlagerten Wechselladung genügend hoch sind.

Man kann hoffen, daß durch ein genaues Studium der Abhängigkeit dieser Erscheinung von Gasart und -Druck sowie von der Elektrodenanordnung sich eine neue Methode zur Untersuchung eines Plasmas ergibt.

35. H. SCHNEIDER (U. Graz): *Kritische Auswertung von Sondenmessungen in einer Quecksilber-Niederdruckentladung.*

Der Strom zu einer Sonde wird nur dann allein von den positiven Ionen gebildet, wenn die Sondenspannungen sehr stark negativ gegen Plasmapotential sind. Die Aufnahme der Sondencharakteristik muß daher, was bisher nicht genügend erkannt wurde, bis zu Spannungen weit unter Plasmapotential erfolgen, damit eine genaue Trennung der Stromanteile der verschiedenen Ladungsträger für Sondenspannungen in der Nähe des Plasmapotentials vorgenommen werden kann. Zieht man vom Sondenstrom den positiven Ionenstrom ab, der keinen konstanten Wert erreicht, weil sich die wirksame Sondenfläche immer vergrößert, so erhält man den Stromanteil der Elektronen. Es gelang durch eine geschickte

Auswertung nachzuweisen, daß der Elektronenstrom durch das Vorhandensein von zwei Elektronengruppen mit MAXWELLScher Geschwindigkeitsverteilung in Plasma der Quecksilberniederdruckentladung bestimmt wird. Für jeden Punkt der Sondencharakteristik konnten die Stromanteile der positiven Ionen, der schnellen und langsamen Elektronen getrennt werden; die Dichten der beiden Elektronensorten ließen sich genau bestimmen.

Zahlreiche Messungen mit Plansonden an verschiedenen Stellen und bei verschiedenen Drucken der Entladung wurden auf die angegebene Weise kritisch ausgewertet. Es wurden interessante Ergebnisse über die Unterschiede in der Beschaffenheit des Plasmas erhalten.

36. F. BRANDSTAETTER (T. H. Wien): *Über die Glimmlichtelektrolyse mit Wechselstrom.*

Die Vorgänge bei der Glimmlichtelektrolyse wurden vor allem in chemischer Hinsicht von A. KLEMENC in zahlreichen Arbeiten untersucht.

Bei der Glimmlichtelektrolyse handelt es sich um elektrolytische Vorgänge, die durch die Glimmentladung zwischen ein oder zwei metallischen Elektroden und einem Elektrolyten als Flüssigkeitselektrode verursacht werden. Die Elektrolyse tritt nicht allein bei Gleichstrom-, sondern auch bei Wechselstromdurchgang auf, so daß gerade bei dieser Entladungsform zur Erklärung der Elektrolyse eingehendere physikalische Untersuchungen für sehr wünschenswert erachtet wurden.

Aus den bisherigen Untersuchungen, die wegen der Kompliziertheit der Entladungsvorgänge keineswegs schon abgeschlossen sind, kann man bereits erkennen, daß bei der Glimmlichtelektrolyse mit Wechselstrom bei einer Versuchsanordnung mit einer-Ag-Elektrode und einer 2 n-H₂SO₄-Lösung je nach den physikalischen Bedingungen (Druck, Temperatur, Spannung, Stromstärke, Elektrodenform, Elektrodenabstand, Form und Größe des Entladungsgefäßes) ein Gleichrichtereffekt auftritt, der sich mitunter umpolt oder auch zum Verschwinden gebracht werden kann.

37. F. REGLER (T. H. Wien): *Röntgenuntersuchungen bei höheren Temperaturen.*

Zur Röntgenuntersuchung bei höheren Temperaturen wurden bisher heizbare DEBYE-SCHERRER-Kameras verwendet. Diese Untersuchungsart hat den Nachteil, daß der Röntgenfilm in die evakuierte Aufnahmekammer eingeschleust wird und daher jeder Filmwechsel mit einer Abkühlung der Probe und mit einem Einlaß von Luft verbunden ist. Im Vortrag wird eine Vakuumkamera besprochen, in der die Probe auf die gewünschte Untersuchungstemperatur gebracht wird, während die Aufnahme mit der Regler-Kegelmückstrahl- oder Ringfilmkamera erfolgt, die sich außerhalb der Hochtemperaturkamera befindet. Diese Anordnung gestattet auch die Möglichkeit des „Abpinselns“ zur Erzeugung richtiger Intensitätsverhältnisse zwischen den einzelnen Linien. Die Einstellung erfolgt mittels eines eigenen Einstellmikroskops.

38. F. REGLER (T. H. Wien): *Laue-Rückstrahlaufnahmen von Schwingquarzen.*

Ein Schwingquarz von 1,8 MHz Eigenfrequenz wurde so angeregt, daß die beiden Metallbeläge senkrecht zur elektrischen Achse und damit parallel zur optischen Achse angeordnet waren. Die Röntgenstrahlrichtung stand senkrecht auf die durch die elektrische und optische Achse gebildete Ebene. Die Aufnahmen

wurden mit einer Kleinst-Kegel-Kamera ausgeführt um kurze Belichtungszeiten zu erzielen und dadurch eine Erwärmung des Kristalls hintanzuhalten. Die Schwingungsanzeige des Quarzes erfolgt mittels eines Flüssigkeitstropfens. Als Strahlungsquelle diente eine Röntgenröhre mit Wolframanode in Halbwellenbetrieb bei 50 kV_s. Die Röntgenaufnahmen von schwingenden und nichtschwingenden Quarzen zeigen meist deutlich erkennbare Unterschiede. Neben den schon von LAUE-Durchstrahlungsaufnahmen bekannten Intensitätsveränderungen zwischen den einzelnen LAUE-Punkten zeigt sich besonders deutlich eine Verbreiterung der LAUE-Punkte in radialer Richtung bei den Aufnahmen des schwingenden gegenüber denen des ruhenden Quarzes. Diese Zunahme der radialen Punktbreite wird im Vortrag an einer schematisch dargestellten und indizierten LAUE-Aufnahme demonstriert. Außerdem zeigen die Aufnahmen des schwingenden Quarzes mehr Interferenzpunkte als die des ruhenden. Die erwähnten Erscheinungen sind einerseits auf die Schwankungen der Atomabstände, andererseits auf geringfügige Gitterverdrehungen zurückzuführen.

39. H. HERGLOTZ (T. H. Wien): *Über die Verwendung eines Seemann-Hochvakuum-spektrographen für die Plangittermethode.*

Die Bezeichnung „Universalspektrograph“, die man diesem Gerät mitunter gibt, besteht nur zu Recht, solange es sich um das Röntgengebiet handelt, in welchem die Kristalle als Beugungsgitter verwendbar sind. Dies ist mit Glimmer als dem Kristall mit größtem Netzebenenabstand der Spaltebene, der zudem in gut ausgebildeten Exemplaren vorkommt, bis etwa 20 Å der Fall. Darüber hinaus bedient man sich geritzter Gitter. Zum Verständnis der Wirkungsweise solcher Gitter wird ein von KOSSEL vorgeschlagener Versuch mit einem Makro-Gitter einer Gitterkonstante von 0,5 cm und optischem Licht gezeigt.

Durch geringe Änderungen am SEEMANNSpektrographen kann die K α -Strahlung des Kohlenstoffes mit einem SIEGBAHN-Gitter von 288 Strichen/mm einigermaßen genau registriert werden, obwohl der Spektrograph hierfür nicht bestimmt ist, jedoch als einziger Hochvakuum-spektrograph zur Verfügung stand. Der Einfluß der Divergenz des Primärbündels auf die Lage der Linien kann demonstriert werden. Die Lichtstärke des Verfahrens reicht nicht aus, um sekundär erregte langwellige Spektren zu registrieren.

40. H. ADLER (U. Wien): *Einige Ergebnisse der Bestrahlung von Ionenkristallen.*

Es wird über neue Arbeiten aus dem II. Phys. Inst. der Univ. Wien auf dem Gebiete der Veränderungen an Ionenkristallen berichtet, welche durch hoch-energetische Bestrahlung hervorgerufen werden. Es handelt sich dabei um das Aufwachsen von Mikrokristallen an bestrahlten Kristallflächen und um Untersuchungen der Farbzentrenausbeute in NaCl bei Bestrahlung mit β -Strahlen mittlerer Energie.

Ferner wird über ein schnellregistrierendes Absorptionsspektrometer und seine Anwendungsmöglichkeiten bei der Untersuchung schnell veränderlicher Vorgänge, vor allem in Kristallen, referiert.

41. K. LINTNER (U. Wien): *Die Emission von Elektronen aus Metalloberflächen (Exo-Elektronen nach Kramer).*

Von J. KRAMER wurde unter bestimmten Bedingungen weit unterhalb des Temperaturbereiches der Glühemission ein Elektronenaustritt aus Metallober-

flächen beobachtet. Das Auftreten kann mit Zählrohren nachgewiesen werden. Exo-Elektronen führt J. KRAMER auf einen Übergang einer nichtmetallischen Phase in die metallische zurück. O. HAXEL ist auf Grund seiner Versuche der Meinung, daß die Wärmetönung einer Reaktion des Metalles mit dem umgebenden Gas die benötigte Austrittsarbeit liefert.

Es wird über Versuche berichtet, die einen Beitrag zur Klärung dieser Frage bringen sollen. Genau definierte Proben wurden dabei in verschiedenen Zählrohrfüllgasen untersucht.

42. 15 Uhr: F. SEIDL: *Filmvorführung über Ultraschall.*

Anschließend Einzelvorträge:

43. W. DAUM (Braunau): *Untersuchungen von Interferenzen in einem Ultraschallfeld.*

In einem Kurzvortrag werden verschiedene Interferenzerscheinungen in Ultraschallfeldern, welche mit Hilfe einer empfindlichen Hohlspiegel-Schlierenapparatur sichtbar gemacht wurden, theoretisch und im Experiment erläutert und sonach an Hand eines Beispiels ein komplizierteres Ultraschallinterferenzfeld genau analysiert. Hierbei wird besonders die Rolle der Kombinationswelle — vom einfachsten Fall zweier sich durchkreuzender Planwellen ausgehend — hervorgehoben. Die Untersuchungsmethode läßt auch, wie gezeigt wird, Versuche zu, welche für die Ultraschalltherapie von Interesse sein können. Zahlreiche Bilder, darunter Schlierenaufnahmen auch von Schallvorgängen in Hohlräumen, werden gezeigt.

44. J. KOLB (U. Innsbruck): *Amplitudenmessung bei hochfrequenten mechanischen Schwingungen (Magnetostriktive Ultraschallgeber).*

Für die Amplitudenmessung eines in Luft schwingenden magnetostriktiven Gebers scheidet die direkte Ausmessung mittels Mikroskop infolge der Kleinheit der Bewegung aus. Elektrodynamische Methoden eignen sich wegen des magnetischen Streufeldes des Gebers nicht. Verschiedene andere Verfahren (Beschleunigungsmesser, Dehnungsmesser und dergleichen) bringen große Schwierigkeiten bei der Auswertung der im Niederfrequenzbereich erhaltenen Eichergebnisse für die hochfrequenten Vorgänge. Als geeignete Methode erweist sich die Messung der Spannungsänderung am Ladewiderstand eines Kondensators bei Kapazitätsänderung infolge Änderung des Kondensatorplattenabstandes (Kondensator-mikrophon).

Die Eichung der für die Amplitudenmessung hergestellten Kapazitätssonde erfolgt mit einer Stimmgabel (435 Hz) durch direkte Messung der Amplitude mittels Mikroskop. Eine sorgfältige Untersuchung der in der Meßanlage enthaltenen frequenz- und amplitudenabhängigen Größen gibt die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Eichergebnisse auf das vorgelegte Problem. Die theoretischen Betrachtungen führen zu Ergebnissen, die mit den Messungen gut übereinstimmen. Mit dem Verfahren läßt sich die Amplitudenverteilung auf der abstrahlenden Stirnfläche des Gebers, die Änderung der Amplitude bei variabler Vormagnetisierung sowie bei Abweichungen der Erregerfrequenz von der mechanischen Resonanzfrequenz des Schwingers ermitteln.

45. J. KOLB (U. Innsbruck): *Über die Leistungsmessung im Ultraschallfeld mittels Schallstrahlungsdruck.*

Eine sorgfältige Überprüfung der verschiedenen Theorien über den Schallstrahlungsdruck liefert die Bedingungen und Gültigkeitsgrenzen der erhaltenen Beziehungen für die Messung der Leistung. (Geometrische Form, Reflexions- und Absorptionseigenschaften der Sonde, Neigungswinkel derselben zur Ausbreitungsrichtung, Abstand von der Quelle, Ausbildung stehender Wellen.)

In Übereinstimmung mit der Theorie zeigen die experimentellen Untersuchungen mittels einer für diese Zwecke gebauten empfindlichen Federwaage, daß bei hohen Frequenzen auch in Flüssigkeiten (z. B. Transformatoröl oder Wasser) infolge der Absorption eine nicht zu vernachlässigende Abhängigkeit des Meßergebnisses von der Entfernung Sonde-Ultraschallquelle (Quarz) auftritt. Durch Beugungseffekte treten Abweichungen von den Eigenschaften einer ebenen Welle auf. Als Sonde verwendet man zweckmäßig entweder einen vollkommenen Absorber oder einen vollkommenen Reflektor. Im letzteren Falle ist (auch bei Schrägstellung der Sonde) besondere Sorgfalt auf die Vermeidung der Ausbildung stehender Wellen zu verwenden. Zur Ermittlung der Gesamtleistung der Ultraschallquelle muß der wirksame Sondenquerschnitt mindestens so groß gewählt werden daß im jeweiligen Abstand Sonde-Quelle das Hauptmaximum des Schallinterferenzfeldes erfaßt wird.

46. H. GHERI und R. STEINMAURER (U. Innsbruck): *Untersuchungen über die solaren Einflüsse auf den täglichen Gang der kosmischen Strahlung.*

Für die Untersuchung der solaren und terrestrischen Einflüsse auf die tägliche Variation der kosmischen Strahlung (KS) stand das 6-jährige Beobachtungsmaterial der Forschungsstation Hafelekar (3 Jahre im Maximum, 3 im Minimum der Sonnenaktivität) zur Verfügung. Die Analyse der Einzeltage ergab, daß in den meisten Fällen der Tagesgang durch eine Sinuswelle dargestellt werden kann, deren Amplitude und Phase jedoch variabel ist. Die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten dieser Variationen, die nur zu einem geringen Teil durch die statistischen Schwankungen der Meßwerte bedingt sind, führt zu folgenden Resultaten: Die mittlere Amplitude ist wesentlich größer zu Zeiten starker als zu Zeiten geringer Sonnenaktivität. In den Minima der 27^d-Wellen erreichen die Tageswellen ihr Maximum. Die Häufigkeitsverteilung der Amplituden und Phasen innerhalb der Sonnenrotationen spricht dafür, daß derselbe Erzeugungsmechanismus für große und kleine Amplituden wirksam ist. Die EHMERTschen Baistörungen sind deutlich ausgeprägt. — Eine Diskussion dieser Effekte schließt eine solare Komponente sowie einen Temperatureffekt in der Erdatmosphäre aus. Die Variationen der Horizontalintensität des Erdfeldes zeigen zwar teilweise Zusammenhänge, die jedoch weder in Amplitude noch in Phase eindeutig mit dem Tagesgang der KS korreliert sind. Eine plausible Ursache des Tagesganges scheint die Einwirkung der von der Sonne emittierten Partikelwolken auf die KS zu sein.

47. BERTA KARLIK (Ra-Institut, Wien): *Die Neutronenbindungsenergien bei den schweren Kernen.*

Unter Zugrundelegung einiger weniger experimentell direkt bestimmter Neutronenbindungsenergien an Bleisotopen werden mit Hilfe genau bekannter radioaktiver Zerfallsenergien eine große Zahl weiterer Neutronenbindungsenergien berechnet, so daß ein Einblick in die gesetzmäßigen Veränderungen dieser Größe gewonnen wird.

48. O. BRUNA und F. DINHOBEL (U. Wien): *Messung kurzer Halbwertszeiten bei (n , γ)-Prozessen.*

Es wurde eine Methode entwickelt, bei der Neutronenquelle, Präparat und Zählrohr in Ruhe bleiben und der Neutronenstrahl durch Cadmiumsektoren, die sich auf einer rotierenden Scheibe befinden, periodisch unterbrochen werden kann. Dadurch wird das Präparat abwechselnd bestrahlt; in der Zwischenzeit sinkt seine Aktivität wieder ab. Mit der rotierenden Scheibe ist ein Schalter gekoppelt, der das Einschalten der Zählapparatur an bestimmten Stellen der Aktivierungs- und Abfallskurve während einer gewissen Zeit ermöglicht. Dadurch kann die Aktivierungs- und Abfallskurve eines Präparates punktweise bestimmt werden. Die Bestimmung der Halbwertszeit erfolgt am besten graphisch. Mit dieser Apparatur ist es möglich, Halbwertszeiten bis zu 10^{-4} sec zu messen, sofern der Störuntergrund nicht zu groß ist, da die Genauigkeit der Bestimmung der Halbwertszeit von dem Verhältnis der Zahl der emittierten β -Teilchen zum Leerwert abhängt.

Die Apparatur wurde mit kurzlebigen Aktivitäten bekannter β -Strahler überprüft und die Halbwertszeit in guter Übereinstimmung gefunden.

49. P. WEINZIERL (U. Wien): *Über die obere Grenze des Impulsspektrums einiger β -Strahler.*

Unter Anwendung der Methode der direkten Ablenkung im magnetischen Feld wird untersucht, ob von β -Quellen Partikel emittiert werden, deren Impuls größer ist als der Maximalimpuls, den Zerfallselektronen gemäß der Umwandlungsenergie des betreffenden Kerns besitzen können. Die mit RaC, RaE und P³² erzielten Resultate werden berichtet und zusammen mit den Ergebnissen anderer Arbeiten kritisch diskutiert.

50. HEINRICH WÄNKE (Ra-Institut, Wien): *Ein elektronisch-optisches Verfahren zur Aufzeichnung der Amplitudenverteilung elektrischer Impulse.*

Die Ermittlung der Amplitudenverteilung elektrischer Impulse ist eine in der Kernphysik häufig auftretende Aufgabe. Wenn ein übermäßiger Zeit- und Arbeitsaufwand vermieden werden soll, ist in vielen Fällen eine automatische Registrierung unerlässlich. Dabei ist eine kontinuierliche, das heißt nicht nach Intervallen unterteilte Aufnahme wünschenswert. Die im Institut für Radiumforschung vom Vortragenden aufgebaute Anlage wurde speziell zur Registrierung von elektrischen Impulsen aus einer Ionisationskammer entwickelt. Die einzelnen Impulse werden hiebei auf elektronischem Wege in höhenproportionale Rechteckimpulse verwandelt, die einer Meßschleife mit Spiegel zugeführt werden. Die Markierung der Ausschlagsmaxima auf einer feststehenden Photoplate kommt durch die der Breite der Rechteckimpulse entsprechenden Verweilzeit der Meßschleife im Ausschlagsmaximum zustande. Das besprochene Verfahren zeichnet sich gegenüber anderen bisher beschriebenen durch einen relativ sehr geringen apparativen Aufwand aus.

51. K. M. KOCH (T. H. Wien): *Der Hall-Effekt in übersättigten Mischkristallen.*

Die Feldstärkenabhängigkeit der Hallkonstanten in gewissen Legierungen läßt sich, wie H. JONES und vor allem E. SONDHEIMER gezeigt haben, durch die Annahme der Koexistenz eines Überschuß- und Defektelektronen-Leitungsmechanismus erklären. Man kann aber dieses „Zweibänder-Modell“ im Rahmen

der notwendigen Näherungsverfahren quantitativ auf ein anschauliches „Zweischichten-Modell“ zurückführen, das zunächst die Rolle eines mehr formalen „Ersatzschemas“ zu spielen scheint. Neuere Erkenntnisse der technisch so bedeutsamen Ausscheidungseffekte in übersättigten Mischkristallen lassen aber hoffen, daß dem „Ersatzschema“ am Ende doch eine gewisse physikalische Realität zukommen könnte.

In vielen Fällen sind die ausgeschiedenen Phasen intermetallische Verbindungen, die, wie JUSTI und Mitarbeiter unlängst gezeigt haben, ausgesprochenen Halbleitercharakter haben können. Da der Hall-Effekt von Halbleitern gerade bei sehr tiefen Temperaturen hohe Werte annimmt, könnte man erwarten, durch systematische Messung der Hallkonstanten (und daneben auch des Temperaturkoeffizienten des Widerstandes) bei tiefen Temperaturen ein Hilfsmittel zum Studium der Ausscheidungsvorgänge zu gewinnen, das die übrigen Methoden (Kleinwinkelstreuung usw.) wirkungsvoll ergänzt.

52. H. REUTER (U. Wien): *Zur Theorie des solaren Klimas.*

Bei den bisherigen Rechnungen zum solaren Klima wurde der Wärmetransport von der Erdoberfläche zur Atmosphäre nicht berücksichtigt. Es wird angenommen, daß dieser Vorgang genügend genau durch einen vertikalen Wärmestrom mit konstantem Austauschkoefizienten beschrieben werden kann. Die Wärmebilanz an der Erdoberfläche, die als Grenzbedingung im theoretischen Ansatz aufscheint, wird in Form einer trigonometrischen Reihe angesetzt. Durch Heranziehung von direkten Messungen der Strahlungsbilanz kann gezeigt werden, daß im allgemeinen in einer solchen Reihe das erste Glied mit der ganztägigen, bzw. ganzjährigen Periode überwiegt. Die Lösung der den Vorgang regelnden Differentialgleichungen der Wärmeleitung (Berührung heterogener Körper mit entsprechender Grenzbedingung an der gemeinsamen Berührungsfläche) wird durch Heranziehung von entsprechenden Beobachtungen und Messungen langjähriger Temperaturschwankungen diskutiert. Es gelingt, den durch einen konstanten Austauschkoefizienten beschriebenen Wärmetransport Boden-Atmosphäre in eindeutige Beziehung zur horizontalen Windgeschwindigkeit zu bringen. Im allgemeinen zeigen die theoretisch berechneten Temperaturamplituden, bzw. die Verzögerung der Phasenzeiten der Temperaturextreme gegenüber den Extremen der Strahlungsbilanz eine gute Übereinstimmung mit entsprechenden Beobachtungen in Wien.

Buchbesprechungen.

Meßtechnik für Funkingenieure. Von F. BENZ. Mit 399 Textabb. und 13 Zahlentafeln, XVI, 513 S. Wien: Springer-Verlag. 1952. Geb. S 246.—, sfr. 51.30, \$ 11.80, DM 49.50.

Das vorliegende Buch, welches vom bekannten Verfasser der „Einführung in die Funktechnik“ Dr. Ing. F. BENZ stammt, ist wiederum durch eine sehr konzise Darstellung, welche die Unterbringung eines umfangreichen Stoffes ermöglicht, gekennzeichnet. Wegen des außerordentlich heterogenen Aufbaues der Hochfrequenztechnik werden an den Verfasser besondere Anforderungen bezüglich der Stoffauswahl und Begrenzung gestellt. Dazu kommt noch der Umstand, daß hochfrequenztechnische Probleme selten mit einfachen mathematischen Mitteln zu bearbeiten sind und man oft genug von mathematischen Entwicklungen Gebrauch macht, welche weit über die Kenntnisse eines Durchschnittingenieurs gehen.

F. BENZ wollte kein Lehrbuch der Meßtechnik unter Verwendung eines großen mathematischen Apparates schreiben, sondern dem Praktiker und den Studierenden technischer Mittelschulen, aber auch der Hochschulen einen verlässlichen Wegweiser durch das weite Anwendungsgebiet der Funkmeßtechnik geben. Daher hat der Verfasser auf mathematische Ableitungen vollkommen verzichtet. Dafür werden, wenn auch sehr knapp, eine große Fülle von Meßverfahren in sämtlichen Frequenzbereichen sowie Untersuchungsmethoden an gebräuchlichen Hochfrequenzgeräten in methodisch wohldurchdachter Weise auseinandergesetzt. Die rein qualitativ abgefaßten kurzen Erläuterungen genügen dabei im allgemeinen zum prinzipiellen Verständnis.

Zahlreiche Literaturhinweise machen die „Funkmeßtechnik“ besonders wertvoll und ermöglichen den Hochfrequenztechnikern jedes Bildungsgrades das Buch mit Vorteil zu verwenden.

E. LEDINEGG, Graz.

Der Raman-Effekt und seine analytische Anwendung. Von W. OTTING. (Anleitungen für die chemische Laboratoriumspraxis: Band V.) Mit 33 Textabb., VI, 161 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. DM 12,60.

In den bisher erschienenen Sammelwerken über den RAMAN-Effekt wurde dessen analytische Anwendung stark vernachlässigt. Das vorliegende Buch versucht diese Lücke auszufüllen. Zunächst werden die theoretischen Grundlagen sehr knapp, im Hinblick auf die Bestimmung des Werkes jedoch ausreichend besprochen. Dann folgt ein Überblick über die „charakteristischen Frequenzen“; hier erscheinen die Tabellen über den Zusammenhang zwischen charakteristischer Frequenz und Art der Verbindung sehr nützlich. Besonders ausführlich werden Paraffine, substituierte Paraffine und Systeme mit einer C = C-Doppelbindung behandelt. Die experimentelle Methodik gibt eine Zusammenstellung von Versuchsanordnungen und Reinigungsmethoden der zu spektroskopierenden Stoffe in der üblichen Weise; dagegen ist der Auswertung der Spektralaufnahmen und vor allem der Intensitätsmessung notwendigerweise etwas mehr Raum gegeben. Die letzten Kapitel sind der eigentlichen Anwendung vorbehalten. Eine Reihe von Beispielen läßt erkennen, welche Möglichkeiten hier zur Verfügung stehen und welche Schwierigkeiten insbesondere bei der quantitativen Analyse zu überwinden sind.

J. WAGNER, Graz.

Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik. Von A. PRÖLL. Mit 278 Textabb., XVI, 612 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. Geb. S 240.—, sfr. 49,50, \$ 11,50, DM 48,—.

Das eben erschienene Werk des bekannten Autors gliedert sich in zwei Teile; der erste Teil bringt die Grundlagen der Aerodynamik und zerfällt in zwei Abschnitte: A. Physikalische Grundlagen, B. Mathematische Grundbeziehungen. Im letzteren Abschnitte befindet sich die Kinematik der Strömungen, dann die Dynamik der Strömungen, ferner Abbildungsaufgaben und ein Überblick über die Aerodynamik der Profile. Ein weiterer Abschnitt ist den Strömungen mit Widerständen, dem Tragflügel von endlicher Spannweite und einem Auszug aus der Gasdynamik gewidmet. Der zweite Teil des Werkes, der aus acht Teilen besteht, erörtert die Flugmechanik. Zuerst werden die theoretischen und praktischen Aufbauelemente entwickelt, dann die Flugleistungen einer Betrachtung unterzogen, hierauf die Geschwindigkeitsleistungen und Steigleistungen eines Flugzeuges diskutiert. Es folgt dann ein Abschnitt über die Sonderleistungen von Flugzeugen, nichtstationäre Flugzustände und Flugeigenschaften, bzw. die Stabilität der Flugzeuge. Als letzter Abschnitt finden wir die dynamische Stabilität des Flugzeuges. Ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis bildet schließlich den Abschluß dieses sehr empfehlenswerten Werkes. Sowohl die Auswahl des Stoffes als die Behandlung desselben, sind als mustergültig zu bezeichnen und führen den jungen Ingenieur und Physiker in klarer und ausführlicher Weise in diese wichtige Materie ein. Druck und Ausführung des Werkes stellen dem Verlag das beste Zeugnis aus.

H. STIPPEL, Graz.

Reports on Progress in Physics. Band XV (1952). Herausgegeben von A. C. STICKLAND. Mit 121 Textabb., IV, 338 S. London: The Physical Society. 1952.

In diesem Bericht findet man wieder zahlreiche interessante Zusammenfassungen. Zuerst enthält er einen Artikel über die Wasserstoffbindung. Dann kommt die Massenspektroskopie zu Worte. Hier fällt auf, daß neben praktischen Fingerzeigen über den Gebrauch der modernsten Einrichtungen auch die Kerneffekte, thermodynamische Eigenschaften und die verschiedenen Kernmessungen eingehend erörtert werden. Energie-Reichweitenbeziehungen folgen dann, wobei besonders die Verhältnisse bei den Alphapartikeln und Protonen eingehende Beachtung finden. Die Beziehungen zwischen der Reichweite geladener Teilchen und ihrer Anfangsenergie werden nach dem neuesten theoretischen Gesichtspunkt diskutiert. TAYLOR, aus dessen Feder dieser Bericht stammt, belegt alles durch reiches Tatsachenmaterial und gibt am Schlusse ein ausführliches Schriftenverzeichnis. Dann folgt ein sehr interessanter Bericht über eine Analyse von Streudaten hoher Energie, wobei hier die Streuung von Neutronen an Protonen und Protonen an Protonen einzeln behandelt werden. Zuerst wird das experimentelle Material zusammengestellt, dann theoretisch diskutiert. Die Hypothese der Ladungsunabhängigkeit wird auch erörtert und alle Beziehungen unter der Annahme von verschiedenen Kraftansätzen besprochen. Dann kommt die Turbulenz an die Reihe. Nach Behandlung der allgemeinen physikalischen Gedankengänge werden die jüngsten Fortschritte, welche dem Verfasser dieses Artikels als bedeutend erscheinen, kurz gezeigt. Er schließt sich an vorhergehende Artikel aus den Jahren 1934 und 1936 an. Ein wichtiger Raum ist den allgemeinen Ähnlichkeitstheoremen gewidmet. Ein Anhang über die verschiedenen Meßmethoden vervollständigt den Bericht, der auch durch ausführliche Literaturangaben belegt ist. Auch die Entwicklung der Elektronentheorie der Metalle ist nicht vergessen worden. Ein hübscher Bericht über dieses aktuelle Thema von RAYNOR

befaßt sich mit den neuesten Errungenschaften dieses wichtigen Gebietes. Schließlich folgen dann noch je ein Artikel über galvanomagnetische Effekte in Leitern und über Wanderwellen-Röhren, die den Leser mit allen wichtigen Eigenschaften und Theorien vertraut machen. Übersichtlichkeit und Klarheit kennzeichnen diese Berichte.

Diese jährlich erscheinenden Übersichten bilden eine wichtige Stütze für den Physiker, der sich über irgend ein neues Gebiet orientieren will. Druck und Ausführung sind als hervorragend zu bezeichnen.

P. URBAN, Graz.

Vorlesungen über Theoretische Physik. Von A. SOMMERFELD. Band IV: Optik. Mit 97 Textabb., XV, 389 S. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung. 1950. DM 16,50.

Als Fortsetzung zu Band III, Elektrodynamik, liegt nunmehr Band IV, Optik von A. SOMMERFELD vor. Es erübrigt sich die Vorzüge und die Behandlungsweise des Werkes dieses Altmeisters der theoretischen Physik zu betonen. Was früher bereits des öfteren gesagt wurde, gilt auch vollinhaltlich für diesen Band. Ich will nur auf besondere Leckerbissen für den theoretischen Physiker hinweisen, die die Darstellung gegenüber anderen Werken gleichen Inhaltes auszeichnen. So fällt vor allem die schöne Behandlung der Dispersionstheorie sowohl vom phänomenologischen Standpunkt als vom Standpunkte der Wellenmechanik auf, die natürlich aus einer modernen Optik nicht wegzudenken ist. Ferner ist die Beugung in ihrer Exaktheit und Klarheit ganz besonders hervorzuheben. Das HUYGENSsche Prinzip findet eine besonders durchsichtige Behandlung, welche ich persönlich durch W. FRANZ das Vergnügen hatte kennenzulernen. Die Behandlung des Problems der Überlichtgeschwindigkeit wird ebenfalls durch die Darstellung des CERENKOV-Elektrons erörtert. Der letzte Paragraph befaßt sich mit der Natur des weißen Lichtes. Hier finden sich Hinweise auf die moderne Photonentheorie und auf die Problematik von Welle und Korpuskel. In mehreren Ergänzungen und einer großen Anzahl von Aufgaben samt Lösungen findet der Leser eine große Auswahl der wichtigsten Probleme. Dem jungen theoretischen Physiker stellt das Werk auch in diesem vierten Bande wertvollste Hilfe für seine Studien zur Verfügung. Die Ausführung und Gliederung stellen dem Verlag ein hohes Zeugnis aus.

P. URBAN, Graz.

Mechanics and Properties of Matter. Von R. J. STEPHENSON. X, 371 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Limited. 1952. Geb. \$ 6,—.

Dieses Buch ist aus einer Vorlesung entstanden, welche der Verfasser am College of Wooster, Ohio, gehalten hat. Darin wird behandelt: Kinematik, Dynamik des Punktes und der starren Körper, Freie und erzwungene Schwingungen, Elastizitätslehre, Statik, Hydrostatik und Hydrodynamik sowie die Wellenlehre. Wenn auch manches Kapitel nicht so ausführlich behandelt wird, wie dies vielleicht mancher wünschen möchte, so gibt doch dieses Buch auf knappem Umfang (365 Seiten) einen vollständigen Überblick über die Lehren der Mechanik und zeigt auch, ohne auf die EINSTEINSche Theorie näher einzugehen, die Grenzen der „klassischen Mechanik“. Das Buch ist klar und leicht faßlich geschrieben und kann jedem, der sich mit Mechanik beschäftigen will, bestens empfohlen werden.

FRITZ SÖCHTING, Wien.

Physikalisches Wörterbuch. Herausgegeben von W. H. WESTPHAL. Zwei Teile in einem Band. Mit etwa 10 500 Stichwörtern und 1595 Textabb., VII, 795 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. Geb. DM 148,—.

Eben ist das Physikalische Wörterbuch unter der redaktionellen Leitung von WILHELM H. WESTPHAL erschienen. Es stellt eine erstaunliche Leistung sowohl für alle verantwortlichen Mitarbeiter und den Verlag, als ganz besonders für den Herausgeber dar. Sein Erscheinen bedeutet einen wirklichen Markstein im wissenschaftlichen Schrifttum und kann nicht hoch genug eingeschätzt werden, ist doch seit dem Erscheinen des letzten ähnlichen Werkes, des Physikalischen Handwörterbuches von BERLINER und SCHEEL ein Zeitraum von etwa zwanzig Jahren verflossen. Gerade diese Zeitspanne aber stellt eine der umwälzendsten Epochen der Entwicklung unserer Wissenschaft dar. Hierzu kommt noch die Verarbeitung der Fortschritte, welche im Ausland (USA., England, Frankreich etc.) während des Krieges gemacht wurden, wobei noch zum Teil die Unzugänglichkeit der Quellen erschwerend mitwirkt. Berücksichtigt man dies alles und betrachtet man den verhältnismäßig kurzen Zeitraum der Herausgabe, so muß man das ganze Werk aufrichtig bewundern. Eine volle Würdigung kann von einem Referenten, der natürlich nur ein begrenztes Arbeitsgebiet aufweist, gar nicht vorgenommen werden. Es wäre eine Vielfalt von Besprechern notwendig, um den Feinheiten gerecht zu werden. So kann ich mich nur auf jene Ausschnitte beschränken, welche meinem Arbeitsgebiet angehören. Der Herausgeber hat seine Mitarbeiter mit großer Sachkenntnis ausgewählt, wie ein Blick auf die Liste seines Stabes zeigt. Namen wie PASCUAL JORDAN, einer der Mitbegründer der Quantenmechanik, zeigen dies unmittelbar. Es braucht daher über den Wert der einzelnen Beiträge, die der Quantentheorie gewidmet sind, kaum mehr gesagt zu werden. Auch die moderne Kernphysik ist in konzentrierter Weise, bei detailliertester Erklärung aller wichtigen Begriffe enthalten. Man findet so z. B. die Energieniveaus der Kerne, den Aufbau derselben aus Elementarpartikeln, die Behandlung der Wechselwirkung und Strahlung etc. Eine übersichtliche Zusammenstellung der bisher bekannten Elementarteilchen, samt ihren Steckbriefen erhöht die Kenntnis auf diesem Gebiete ganz wesentlich. Aber auch ausgefallene Probleme, die den Grundlagenforscher oft mühseliges Nachschlagen und Nachlesen von Spezialabhandlungen aufnötigen, sind zu finden. Die Quantenmechanik der Wellenfelder, mit allen ihren schwierigen Begriffsbildungen, wie Lorentzinvarianz, Eichinvarianz, zweite Quantelung usw. findet in prägnanter Weise ihre Darstellung. Bei dieser Fahrt durch das Werk sei auch ein Hinweis auf einen Mangel gestattet. In der Erklärung der Ergodenhypothese wird dieselbe mit der Quasiergodenhypothese identifiziert und außerdem behauptet, daß die Bahn des Zustandspunktes im Phasenraum die Energiefläche gleichmäßig dicht erfüllt, „also durch jeden Punkt der Energiefläche hindurchgehen muß“. Natürlich lassen sich solche Mängel, die bei der Vielfalt des Stoffes leicht auftreten können, in einer sicherlich zu erwartenden Neuauflage beseitigen. Der Zweck des Werkes liegt vor allem in der Arbeitserleichterung für den Leser. Das Gebiet erstreckt sich nicht allein auf Physik, sondern auch über die physikalische Chemie und Astrophysik, die heute wichtige Zweiggebiete darstellen. Im gewissen Umfange wurde auch die Geophysik und die Biophysik berücksichtigt. Hierdurch ergab sich eine gewisse Beschränkung, welche sich auf die mehr technischen Anwendungsmöglichkeiten beziehen. Daß gerade in den schwierigen Zeiten nach Beendigung des Krieges ein derartiges Riesenwerk erscheinen konnte, stellt dem Verlag wohl das beste Zeugnis aus. Es zeigt wie kein anderes Werk den gegenwärtigen Stand der physikalischen Erkenntnisse unserer Zeit und wird dem deutschen Schrifttum zur hohen Ehre gereichen. Es erübrigt sich daher, das Werk allen Fachkollegen aufs Wärmste zu empfehlen.

P. URBAN, Graz.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzu-

wenden, also $(a+b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPFER, Nature 136, 180 (1935). Um Einheitlichkeit in den Abkürzungen der Zeitschriftenzitate zu erreichen, ist die Herausgabe eines Verzeichnisses geplant.

Korrekturen: Grundsatz muß angesichts der schwierigen Verhältnisse in der ganzen Drucklegung sein, daß sich der Autor, der seine Abhandlung veröffentlicht sehen will, stillschweigend verpflichtet, ebensoviel Sorgfalt, wie er für Literaturstudium, Rechnungen, Beobachtungen aufwendet, auch für die Niederschrift seiner Ergebnisse und die anschließende Korrekturarbeit aufzubringen: auch dann, wenn er seine Interessen bereits wieder anderen Problemen zugewendet hat.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Bei der Schriftleitung sind folgende Beiträge eingelangt:

(Änderungen in der Reihenfolge bei der Veröffentlichung müssen aus technischen Gründen vorbehalten bleiben.)

- Hinteregger, H.** Induktionserscheinungen bei Bewegung von Materie in primären Magnetfeldern und ihre experimentellen Anwendungsmöglichkeiten. I: Experimentelle Grundlagen. II: Translationsfälle. III: Theoretische Grundlagen für die Erfassung der allgemeineren Fälle 10. X. 1951
- Hittmair, O.** Zur Kernspinbestimmung durch inelastische Streuung 24. III. 1952
- Überall, H.** Der Wirkungsquerschnitt der Proton-Proton-Streuung bei kleinen Energien 21. V. 1952
- Krzywoblocki, M. Z. E.** On the Fundamentals of Locally Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics of a Compressible Medium 3. VI. 1952
- Ledinegg, E. und P. Urban.** Über die Nullpunktssuszeptibilität einer linearen antiferromagnetischen Atomkette 20. VI. 1952
- Herrmann, J. und Th. Sexl.** Zur quantitativen Theorie der radioaktiven α -Emission 29. VI. 1952
- Bergmann, O.** Zur Optik in der verallgemeinerten Feldtheorie . 29. VIII. 1952
- Überall, H.** Der Photoeffekt im homogenen elektrischen Feld . 5. IX. 1952
- Überall, H. und F. Schlesinger.** Der Quadrupolübergang beim Kernphotoeffekt am Deuteron 6. IX. 1952
- Florian, A. und P. Urban.** Zur Erzeugung von Mesonen beim Durchgang durch Materie 20. IX. 1952
- Haefner, R.** Die Zündspannung von Gasentladungen unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes im Druckbereich von 10 bis 10^{-8} Torr 27. X. 1952
- Theimer, O.** Intensitätsprobleme beim Raman-Effekt 1. Ordnung 27. X. 1952

Eder, G. Spin-Bahn-Kopplung nach der pseudoskalaren Theorie	27.	X. 1952
Baumann, K. Eine einfache Herleitung der Streuformel von Bhabha	27.	X. 1952
Baumann, K. Zur Definition der relativistischen Teilchen-Antiteilchen-Wellenfunktion	27.	X. 1952
Hittmair, O. Die Geometrie der Winkelverteilung von Kernreaktionen	27.	X. 1952
Leimanis, E. Über die Bewegung eines Massenpunktes in einem widerstehenden Mittel veränderlicher Dichte	30.	X. 1952
Porod, G. Zur Thermodynamik der Phasenumwandlungen I. Heterobare Phasenübergänge in Einstoffsystemen	30.	X. 1952

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

PHYSIKALISCHES WÖRTERBUCH

Herausgegeben von

WILHELM H. WESTPHAL
BERLIN

Zwei Teile in einem Band. Mit etwa 10 500 Stichwörtern und 1595 Textfiguren.

VIII, 1630 Seiten. 4^o. 1952. In Halbfranz gebunden. DM 148,—.

Inhaltsübersicht: Erster Teil: Stichwörter A—L, Zweiter Teil: Stichwörter M—Z.

Anhang: Geschichte der Physik — Lebensdaten der Physiker — Tabellen — Nachträge

Das bewährte Physikalische Handwörterbuch von BERLINER und SCHEEL, das zuletzt 1932 in 2. Auflage erschien, ist seit langem vergriffen. In den seitdem verflossenen 20 Jahren hat die Physik ihren seit der Jahrhundertwende eingeleiteten Fortschritt in eher noch verstärktem Tempo fortgesetzt. Insbesondere ist die Physik der Atomkerne mit ihren weltbewegenden Auswirkungen fast ganz ein Kind dieser jüngsten Zeit. Aber auch auf den meisten anderen Gebieten sind wesentliche, teilweise umwälzende neue Erkenntnisse zu verzeichnen. Als Beispiel sei nur die Physik des Weltalls genannt, der es mehr und mehr gelingt, auf dem Boden der allgemeinen Relativitätstheorie einerseits, der Atom- und Kernphysik andererseits, das Werden und den heutigen Zustand des Weltalls und der Himmelskörper zu enträtseln.

Es war deshalb nötig, ein völlig neues Werk zu schaffen, das dieser Entwicklung Rechnung trägt. Um Raum für den gewaltig angeschwollenen Stoff zu gewinnen, war eine gewisse Beschränkung auf das eigentliche Erkenntnisgut und das für die reine Forschung Wesentliche unter Verzicht auf die Behandlung rein technischer Anwendungen unumgänglich. Trotzdem hat sich die Zahl der Stichwörter mit etwa 10 500 gegenüber dem Physikalischen Handwörterbuch nahezu verdoppelt.

Die Zuverlässigkeit der Darstellung wird durch die Verteilung des Stoffes auf etwa 80 Mitarbeiter gewährleistet, die als Sachverständige auf ihren Spezialgebieten bekannt sind. Ein Nachtrag bringt Ergänzungen, die noch während der Drucklegung eingingen. Ein Anhang enthält unter anderem einen kurzen Abriss der Geschichte der Physik und eine Tabelle mit den Lebensdaten von etwa 800 Physikern.

Zu beziehen durch:

MINERVA

WISSENSCHAFTLICHE BUCHHANDLUNG GES. M. B. H., WIEN I

Verkaufslokal: Schottenbastei 2 Tel. U 27047 Expedition: Mölkerbastei 5 Tel. U 26560

Printed in Austria